SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXIX. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1879. — HEFT I BIS V.

(Mit 7 Tafeln und 25 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1879.

Die Formel von Dulong und Petit ist lediglich eine empirische Formel, welche die der Strahlung zugeschriebenen Wärmeabgaben des zu den Versuchen verwendeten Thermometers genau wiedergibt. Dasselbe würden aber auch andere Formeln leisten, nur zeichnet sich die Formel von Dulong und Petit durch ihre ausserordentliche Einfachheit aus. Ich kann jedoch hier eine andere Formel von gleicher, ja man könnte sagen von noch grösserer Einfachheit anführen, welche den Beobachtungen auch gut entspricht und in theoretischer Beziehung noch einen Vorzug besitzt.

Man erhält nämlich den von Dulong und Petit angegebenen Abkühlungsgeschwindigkeiten sehr nahe kommende Zahlen, wenn man annimmt, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional ist. In der folgenden Tabelle sind in der zweiten Reihe die Abkühlungsgeschwindigkeiten enthalten, welche Dulong und Petit für die in der ersten Reihe stehenden Temperaturen des Thermometers fanden, während die kugelförmige Hülle, in deren Mitte das Thermometer sich befand, auf 0° gehalten wurde. Die in der dritten Reihe stehenden Zahlen erhält man, wenn man die Differenzen $(273+80)^4-273^4$, $(273+100)^4-273^4$, u. s. w. durch 6 dividirt und hinter der ersten Ziffer, bei dem letzten Quotienten hinter der zweiten, den Decimalpunkt setzt.

		Berechnet	Differenz
80°	1·74	1·66	+0·08
100	2·30	2·30	0
120	3·02	3·05	— 3
140	3·88	3·92	— 4
160	4·89	4·93	— 4
180	6·10	6·09	+ 1
200	7·40	7·42	— 2
220	8·81	8·92	— 11
240	10·69	10·62	+ 7

Die nach der Formel von Dulong und Petit berechneten Werthe haben gegen die beobachteten die in die letzte Stelle fallenden Unterschiede

$$+2,\ -3,\ -3,\ -1,\ +2,\ +7,\ +6,\ -8,\ +1$$

nächst für letztere gesetzt, und von den in Luft von grösserer Dichte gefundenen subtrahirt. Die Reste wurden als Masse für die abkühlenden Wirkungen der Luft von den angegebenen verschiedenen Dichten betrachtet und aus denselben eine Formel abgeleitet für die Abhängigkeit dieser Wirkungen von der Dichte der Luft. Nach dieser Formel wurden endlich die bei 2 oder 3 Mm. Druck beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten auf solche im leeren Raume reducirt. Auf die so gewonnenen Zahlen ist das Gesetz, welches Dulong und Petit über die Wärmestrahlung aufstellten, gegründet.

Die Wirkung, welche die Luft bei der Abkühlung eines Körpers übt, ist eine zweifache. Die eine Art derselben besteht darin, dass die den wärmeren Körper umgebende Luft Wärme aufnimmt, sich ausdehnt, durch den Auftrieb gehoben und durch kältere Luft ersetzt wird. Dieser Process wiederholt sich in continuirlicher Weise, die so entstehende Strömung führt fortwährend Wärme von dem sich abkühlenden Thermometer zur kälteren Umgebung. Die zweite Art der Wirkung der Luft besteht darin, dass die Luft wie ein fester Körper die Wärme leitet und auch, wenn sie zwischen dem wärmeren Thermometer und der kälteren Hülle in vollständiger Ruhe sich befindet, von dem ersteren Wärme zu der Hülle führt. Während nun die Fortführung der Wärme durch Strömung von der Dichte der Luft abhängig ist, so dass sie mit abnehmender Dichte immer kleiner wird, ist dies bezüglich der Wärmeleitung nicht der Fall. Die Grösse der letzteren ist unabhängig von der Dichte, sie ist in der Luft von 2 Mm. und von noch kleinerem Drucke ebenso gross, wie in der Luft von der gewöhnlichen oder auch von noch grösserer Dichte.

Auf diese Eigenschaft der Luft und der Gase überhaupt wurde man zuerst durch die dynamische Theorie des gasförmigen Aggregatzustandes geführt und ich habe schon in der ersten Abhandlung über die Wärmeleitung in Gasen einen Versuch mitgetheilt, durch welchen dieses theoretische Resultat seine Bestätigung gefunden hat. In umfangreicherer Weise ist es noch durch die Versuche von Kundt und Warburg und von Winkelmann nachgewiesen worden. Ich selbst habe mehrere Versuche über die Wärmeleitung der Luft von zwei Atmosphären bis zu 4 Mm. Druck ausgeführt und dieselbe in diesem ganzen Intervall

Strömungen der Luft können bei den Drucken von 2 oder 3 Mm. schon aufgehört und die Luft nur mehr wie ein fester Leiter gewirkt haben. Dann haben die von Dulong und Petit an den Beobachtungen angebrachten Correctionen keinen Sinn. Waren aber Strömungen noch vorhanden, so ist ihr Einfluss gewiss ein anderer, als er nach den aus Versuchen bei höheren Drucken abgeleiteten Formeln berechnet wurde.

Es haftet daher an den von Dulong und Petit berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten eine Unsicherheit, gleich der Grösse der von ihnen an den Beobachtungen angebrachten Correctionen. Da sie die uncorrigirten Abkühlungsgeschwindigkeiten nicht mittheilen, so lässt sich diese Grösse nicht angeben, sie ist auch gewiss nicht für alle Beobachtungen dieselbe.

Um wenigstens ein angenähertes Mass für diese Grösse zu gewinnen, habe ich die fraglichen Correctionen unter den zwei Voraussetzungen, dass der Druck der im Ballon zurückgebliebenen Luft 2 und 3 Mm. betrug, berechnet. Die Formel, welche Dulong und Petit für die Wirkung der Luft auf die Abkühlung ihres Thermometers aufgestellt haben, ist

$$V = 0{\cdot}00919\,p^{0{\cdot}45}\,t^{1{\cdot}233}$$

und bedeutet darin p den Druck der Luft in Metern, t den Unterschied der Temperaturen des Thermometers und der Hülle. Nach dieser Formel ist die nachstehende Tafel berechnet.

	$p = 0{\cdot}002$	$p = 0{\cdot}003$
$t =$ 20°	0·02	0·03
40	0·05	0·06
60	0·09	0·11
80	0·12	0·15
100	0·16	0·20
120	0·21	0·25
140	0·25	0·30
160	0·29	0·35
180	0·34	0·41
200	0·39	0·46
220	0·43	0·52
240	0·48	0·58

Die durch die Leitung der Luft abgeführte Wärmemenge sei Cdt. Es besteht demnach die Gleichung:

$$pcv_1 = 4\pi r_1^2(H_1 - H_2) + C. \tag{1}$$

Um die Grösse C zu finden, hat man die Wärmeleitung in einem von zwei concentrischen Kugelschalen begrenzten Körper zu betrachten. Wird die innere Begrenzung desselben auf der constanten Temperatur u_1, die äussere auf der constanten Temperatur u_2 gehalten, so strebt die Temperaturvertheilung im Körper einem Beharrungszustande zu, welcher um so schneller sich herstellt, ein je besserer Temperaturleiter der Körper ist. Die Temperatur u an irgend einer Stelle in der Entfernung r von dem Mittelpunkte der beiden begrenzenden Kugelflächen ist in diesem Zustande nur von r abhängig. Die durch eine Kugelfläche vom Radius r in der Zeiteinheit gehende Wärmemenge ist bestimmt durch den Ausdruck

$$W = -4\pi r^2 k \frac{du}{dr} \tag{2}$$

wenn k das Wärmeleitungsvermögen des Körpers bedeutet. W ist für alle Kugelschalen eine und dieselbe Grösse, also von r unabhängig und diese Bedingung gestattet, u aus der Gleichung (2) als Function von r zu finden.

Bedeutet k das Wärmeleitungsvermögen der Luft, so wird durch W auch die Wärme angegeben, welche einem bei der constanten Temperatur u_1 gehaltenen kugelförmigen Thermometer durch die Leitung in der Luft entzogen wird.

Bei der Anwendung der Gleichung (2) ist jedoch noch zu berücksichtigen, dass das Leitungsvermögen der Luft von der Temperatur derselben abhängig ist. Dasselbe kann hinreichend genau als eine lineare Function von u dargestellt werden, so dass unter k_0 den Werth von k für $u = 0$ verstanden,

$$k = k_0(1 + \alpha u)$$

gesetzt werden kann.

Das Gesetz der Temperaturvertheilung in der in Betracht stehenden Kugelschale ist demnach durch die Gleichung

$$W = -4\pi k_0 r^2 (1 + \alpha u) \frac{du}{dr}$$

Für die auszuführenden numerischen Rechnungen bietet jedoch diese Zerlegung keinen Vortheil.

Wichtiger ist es, zu bemerken, dass W als Differenz zweier von u_1 und u_2 abhängiger Grössen erscheint, und dass man für W immer einen Ausdruck von der Form

$$W = f(u_1) - f(u_2)$$

erhält, welcher Art auch die Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der Temperatur sein mag. Man kann also auch den durch die Leitung der Luft bedingten Wärmeverlust der inneren Kugel betrachten als das Resultat von zwei Wärmeströmen, von denen der eine von der Kugel zur äusseren Hülle, der zweite in umgekehrter Richtung vor sich geht, jeder unabhängig von dem anderen. Es verhält sich also der Wärmeaustausch durch Leitung analog jenem, welcher zwischen verschieden warmen Körpern durch Strahlung vermittelt wird. Die von Dulong und Petit angegebenen Werthe der Abkühlungsgeschwindigkeiten besitzen auch diese Eigenschaft, dass sie sich als Differenzen zweier Grössen darstellen lassen, von welchen die eine nur von der Temperatur des Thermometers, die andere nur von der Temperatur der Hülle abhängig ist.

Die Zerfällung von W oder C in zwei von u_1 und u_2 abhängige Theile ist auch für die numerische Berechnung derselben von Vortheil. Ich will desshalb die Bezeichnung

$$L = k_0\left(u + \frac{\alpha u^2}{2}\right) \tag{4}$$

einführen und durch L_1 und L_2 die Werthe darstellen, welche L nach Einführung von u_1 und u_2 für u erhält. Die Formel (1) lässt sich dann so schreiben

$$pcv_1 = 4\pi r_1^2(H_1 - H_2) + \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}(L_1 - L_2). \tag{5}$$

Zur Berechnung des Einflusses der Leitung auf die Abkühlungsgeschwindigkeit ist noch die Kenntniss von p und c nothwendig.

Dulong u. Petit haben nicht die zur genauen Bestimmung dieser Grössen erforderlichen Daten, sondern nur den Radius der Thermometerkugel $r_1 = 3$ Ctm. angegeben. Ich will also pc so berechnen, als handelte es sich lediglich um eine Quecksilber-

Für die erste Beobachtungsreihe, welcher $u_2 = 0$ entspricht, findet man in der letzten Colonne dieser Tafel unmittelbar die auf die Wärmeleitung entfallenden Antheile der Abkühlungsgeschwindigkeiten. Für die übrigen Beobachtungsreihen werden diese Antheile durch die Differenzen der oberen Glieder der Colonne gegen das unterste, oder das zweite u. s. w. gefunden. Um den Einfluss dieser Correctionen auf die Werthe der Abkühlungsgeschwindigkeiten ersichtlich zu machen, will ich die Daten der ersten Beobachtungsreihe und die zugehörigen Correctionen neben einander stellen.

240°	10·69	0·95
220	8·81	0·86
200	7·40	0·76
180	6·10	0·67
160	4·89	0·58
140	3·88	0·50
120	3·02	0·42
100	2·30	0·34
80	1·74	0·26

Die Correctionen betragen demnach 15% für die bei den niedrigsten, 10% für die bei den höchsten Temperaturen beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten. Sie betragen zufälligerweise fast genau das Doppelte von jenen, welche ich oben nach der Formel von Dulong und Petit unter der Annahme eines Druckes von 2 Mm. berechnete.

Obwohl der Antheil der Wärmeleitung an der Abkühlung ein beträchtlicher ist, so wird durch dessen Berücksichtigung das Gesetz der Abkühlung nicht bedeutend modificirt. Vor allem ist zu bemerken, dass die wegen der Wärmeleitung corrigirten Zahlen noch rascher mit der Temperatur ansteigen, als die nicht corrigirten.

Wesentlich anders gestaltet sich jedoch die Sache für die Beobachtungen, welche Dulong und Petit mit dem versilberten Thermometer gemacht haben.

Die folgende Tabelle enthält zwei zusammengehörige Reihen über die Abkühlung des nackten und des versilberten Thermometers, die wegen der Wärmeleitung anzubringenden Correctionen

Wärmeleitung der Luft und ist viel kleiner als das Verhältniss des Strahlungsvermögens des Glases und des Silbers. Diese Zahl hat keine absolute Bedeutung, sondern ist von der Anordnung des Apparates abhängig. Wählt man zu den Versuchen ein kleineres Thermometer, so wird der Einfluss der Wärmeleitung im Vergleich zu jenem der Strahlung vergrössert, in Folge dessen werden die Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten und versilberten Thermometers einander näher gebracht. Dulong und Petit haben auch mit einem kleineren Thermometer einige Versuche ausgeführt und diese liefern für das Verhältniss der Abkühlungsgeschwindigkeiten nicht 5·7, sondern viel kleinere Werthe, von 2·5 bis 2·9. Allerdings hat zu dieser grossen Differenz zwischen den Beobachtungen mit dem kleinen und jenen mit dem grossen Thermometer der vergrösserte Einfluss der Wärmeleitung nicht allein beigetragen.

Dulong und Petit haben bei ihren Versuchen mit den versilberten Thermometern nur die Kugeln, nicht auch die Röhren versilbert, welchen Fehler schon de la Provostaye und Desains erkannt und bei ihren Abkühlungsversuchen auch vermieden haben. Die von Dulong und Petit beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten der versilberten Thermometer bedürfen desshalb, wenn sie als Mass der Strahlung des Silbers dienen sollen, noch einer weiteren Verminderung wegen der Strahlung der Thermometerröhre. Den Betrag derselben genau zu berechnen, ist nicht leicht, in diesem Falle auch nicht möglich, da ein wesentliches Datum, die Grösse des Querschnittes der Röhre fehlt. Zur Beurtheilung des Werthes der von Dulong und Petit gemachten Beobachtungen ist es jedoch nothwendig, wenigstens eine beiläufige Vorstellung von der Grösse dieses Fehlers sich zu verschaffen.

Bezeichnet man mit ρ den Radius, mit l die Länge der Röhre, mit r den Radius der Kugel des Thermometers, so stehen die Oberflächen der Röhre und der Kugel in dem Verhältniss von $\rho h : 2r^2$. Für das grosse Thermometer ist $r = 3$, $h = 12$ Ctm., ρ nehme ich $= 0·15$, ein Betrag, der wohl nicht zu gross sein dürfte, da an der Röhre doch eine 3 Pfund Quecksilber enthaltende Kugel angeblasen war. Das Verhältniss zwischen den beiden Oberflächen ist demnach wie $1 : 10$ und ebenso würden cylindrische Thermometer anwendeten, ist überhaupt die Berechnung der Wärmeleitung nicht möglich.

Man kann übrigens, auch ohne den Einfluss der Luft auf den Wärmeaustausch zu kennen, die Abkühlungsversuche zur Prüfung der aufgestellten Strahlungsgesetze verwenden, wenn Beobachtungen über die Abkühlung eines und desselben Körpers bei zwei verschiedenen Oberflächen aber unter sonst gleichen Umständen gemacht sind.

Die Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten des Thermometers mit nackter und mit versilberter Kugel sind die Masse für die Unterschiede der Strahlungsvermögen des Glases und des Silbers. Diese Zahlen sind sowohl von dem Einfluss des Stieles, als auch von jenem der Wärmeleitung frei und zum mindesten mit grosser Annäherung auch frei von dem Einfluss der Strömungen.

Ich will in dieser Weise zwei von **Dulong** und **Petit** mitgetheilte Beobachtungsreihen verwerthen, welche sich auf die Abkühlung des nackten und versilberten Thermometers bei demselben Drucke von 720 Mm. beziehen. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Reihe die Differenzen der Temperatur des Thermometers gegen jene der Hülle, welche 20° betrug.

Die Bedeutung der Zahlen in den übrigen Reihen ist durch die Überschriften gegeben.

	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Unterschied
	Glas	Silber	
100°	4·99	2·80	2·19
120	6·46	3·50	2·96
140	8·05	4·32	3·73
160	9·85	5·19	4·66
180	11·76	6·02	5·74
200	14·04	6·93	7·11

Die Unterschiede der Abkühlungsgeschwindigkeiten müssen, wenn die von **Dulong** und **Petit** aufgestellte Formel für die Wärmestrahlung für Glas und Silber richtig ist, ebenfalls mit dieser Formel in Übereinstimmung stehen. Ist die Ausstrahlung des Glases durch ma^u, jene des Silbers durch $m'a^u$ gegeben, so ist ihr Unterschied durch $(m-m')a^u$ bestimmt und wenn δ die

Luft nur auf ihre Leitung beschränkt war. Dann fällt aber diese Wirkung bei der Subtraction der Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten und des versilberten Thermometers vollständig weg.

Die Temperatur der Hülle war 14°7. Die erste Reihe der folgenden Tabelle gibt die Temperaturen des Thermometers. Die beiden anderen Reihen geben die Geschwindigkeiten der Abkühlung und zwar liegt diesen nicht die Minute, sondern die Secunde als Zeiteinheit zu Grunde.

	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenzen
	Glas	Silber	
75·1	0·05675	0·02035	0·03640
96·86	0·08318	0·02876	0·05442
108·6	0·09966	0·03333	0·06633
121·884	0·11934	0·03859	0·08075
136·584	0·14360	0·04479	0·09881

Dividirt man die in der letzten Reihe stehenden Differenzen durch die Differenzen der vierten Potenzen der absoluten Temperaturen des Thermometers und der Hülle, so erhält man folgende Quotienten

4648, 4588, 4621, 4624, 4641

welche gut mit einander stimmen. Es passt zu diesen Versuchen die neue Formel besser, als jene von Dulong und Petit. Die obigen Differenzen geben nämlich durch die entsprechenden Werthe von a^{δ}—1 dividirt die Quotienten

6212, 6236, 6327, 6373, 6432.

Von den mit demselben Thermometer ausgeführten Beobachtungen will ich noch zwei correspondirende Reihen anfügen. Die Oberfläche des Thermometers war einmal geschwärzt, das andere Mal vergoldet. Die Abkühlung geschah in einem grossen Ballon von 24 Ctm. Durchmesser, 14°7 Temperatur und bei einem Drucke von 88 Mm. Die erste Reihe der folgenden Tabelle enthält die Temperaturen des Thermometers

	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenzen
	Schwarz	Vergoldet	
63°57	0·05057	0·01973	0·03084
108·58	0·11697	0·04346	0·07351
121·77	0·14070	0·05078	0·08992

		Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenz
		Schwarz	Versilbert	
48°18	5^{mm}	0·02901	0·00852	0·02049
55°55	156	0·04725	0·02132	0·02593
	76	0·04354	0·01749	0·02605
	5	0·03667	0·01062	0·02605
80°98	156	0·08598	0·03778	0·04820
	76	0·07849	0·03080	0·04769

Die aus den Beobachtungen bei derselben Temperatur, aber bei verschiedenen Drucken abgeleiteten Differenzen stimmen sehr nahe überein, ein Beweis, dass durch die Bildung dieser Differenzen Zahlen gewonnen werden, welche von dem Einflusse der Luft auf die Abkühlung frei sind.

Die Mittelwerthe der Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten geben durch die zugehörigen Differenzen der vierten Potenzen der absoluten Temperaturen dividirt die Quotienten

5407, 5418, 5417

und zwar ist der wirkliche Werth des Mittels aus diesen drei sehr gut übereinstimmenden Zahlen $5414 . 10^{-15}$.

Vergleicht man die Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten mit der Formel von Dulong und Petit, indem man dieselben durch die entsprechenden Werthe von $a^{\delta}-1$ dividirt, so erhält man die Quotienten

7044, 7105, 7277,

welche wieder, wie in dem früheren Falle, für die Beobachtungen bei höherer Temperatur grösser ausfallen, als für jene bei niederer.

Man kann also aus der hier durchgeführten Vergleichung das Resultat ziehen, dass den Versuchen von Dulong und Petit, welche sich auf höhere Temperaturen beziehen, beide Formeln gleich gut entsprechen, dass aber den Versuchen von de la Provostaye und Desains, welche zum Theil bei niedrigeren Temperaturen ausgeführt sind, die von Dulong und Petit aufgestellte Formel sich weniger gut anschliesst, als die neue Formel der vierten Potenzen.

gestrahlt als von derselben Fläche in derselben Zeit von der Hülle von 0° aufgenommen wird.

Aus den Versuchen, welche de la Provostaye u. Desains über die Abkühlung nackter und geschwärzter Thermometer ausgeführt haben, ergibt sich, dass das Emissionsvermögen des Glases 0·88 ist, wenn man das des Russes = 1 nimmt. Für eine berusste Fläche hätte man demnach $H_{100}—H_0 = 1$.

Speciell zu dem Zwecke, die eben berechnete Grösse zu bestimmen, hat Lehnebach die Wärme gemessen, welche eine mit Eis gefüllte Glaskugel von einer auf 100° gehaltenen von der Kugel durch eine Luftschicht getrennten Glashülle in einer bestimmten Zeit erhielt.

Lehnebach fand, dass nach Abzug der durch die Leitung der Luft übergeführten Wärme, für die durch Strahlung vermittelte, der Werth 0·917 übrig bleibt, bei dessen Bestimmung dieselben Einheiten wie bei der obigen Rechnung zu Grunde gelegt wurden. Diese Zahl liegt der oben berechneten 0·882 ziemlich nahe, doch nachdem Lehnebach auch für den Fall, dass Kugel und Hülle geschwärzt waren, den Werth 0·916 fand, so ist es ungewiss, ob diese Zahl mit 0·882 oder mit der für eine berusste Fläche abgeleiteten, nämlich 1, zu vergleichen ist. Es kann die von Lehnebach angewendete Schwärzung nicht vollkommen genug gewesen sein, man kann aber das von anderen Versuchsergebnissen abweichende Resultat auch so deuten, dass eine mit Wasser oder Eis gefüllte Glaskugel ein grösseres Ausstrahlungsvermögen besitzt als eine massive Glaskugel oder als eine mit Quecksilber gefüllte. Dasselbe muss dann auch für die in Wasser eingetauchte Glashülle gelten.

Wenn man das Verhältniss des Emissionsvermögens des Silbers zu jenem des Glases und zu dem eines schwarzen Körpers kennt, so kann man auch die Differenzen der unter gleichen Umständen beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten des versilberten und des nackten oder geschwärzten Thermometers zur absoluten Bestimmung der von diesem ausgestrahlten Wärmemenge benützen. Selbst wenn das Verhältniss des Emissionsvermögens des Silbers zu den übrigen nicht genau bekannt wäre, würde der dadurch entstehende Fehler nur geringen Einfluss auf das Resultat nehmen, weil dieses Verhältniss eine kleine Zahl ist.

zu nehmen, worin A eine von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers abhängige Grösse bedeutet.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit für die nackte Thermometerkugel ist durch

$$w_1 = \frac{3A}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

jene für die versilberte durch

$$w_1' = \frac{3A'}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

gegeben. Setzt man für den Quotienten

$$\frac{w_1 - w_1'}{T_1^4 - T_2^4} = \frac{3}{r_1 cs}(A - A') \tag{8}$$

den oben gefundenen Mittelwerth 135.10^{-12}, so folgt aus dieser Gleichung

$$A - A' = 6075.10^{-14}$$

oder wenn man beide Seiten mit $T_0^4 = 273^4$ multiplicirt

$$(A - A')T_0^4 = 0{\cdot}3374.$$

Setzt man wieder voraus, dass man durch Erhöhung dieser Zahl um 3 Procent AT_0^4 erhält, so wird

$$AT_0^4 = 0{\cdot}3475.$$

Diese Zahl bedeutet die von einem Quadratcentimeter Glasfläche bei 0° ausgestrahlte Wärmemenge und ist mehr als um die Hälfte kleiner als die mit Hilfe der von Dulong und Petit aufgestellten Formel für dieselbe Grösse gefundene Zahl.

Um die von der Einheit der Glasfläche bei 100° ausgestrahlte Wärmemenge nach der neuen Formel zu berechnen, hat man 0·3475 mit $\left(\frac{373}{273}\right)^4 = (1{\cdot}366)^4$ zu multipliciren. Man erhält $AT_{100}^4 = 1{\cdot}2110$ und somit die Grösse

$$A(T_{100}^4 - T_0^4) = 0{\cdot}8635,$$

etwas kleiner als nach der Formel von Dulong und Petit.

Durch Division mit 0·88 erhält man die auf eine schwarze Fläche sich beziehende Grösse $H_{100} - H_0 = 1{\cdot}010$ oder $= 0{\cdot}981$, Hingegen liefert die Berechnung der mit dem cylindrischen Thermometer ausgeführten Beobachtungen bedeutend abweichende Werthe.

Der von der Strahlung allein abhängige Theil der Abkühlungsgeschwindigkeit eines Cylinders ist bestimmt durch die Gleichung

$$pcw_1 = 2\pi r_1(r_1+h)(H_1-H_2),$$

wenn r_1 den Radius, h die Höhe des Cylinders bedeutet. Zur Bestimmung von pc will ich unmittelbar die von de la Provostaye und Desains gemachte Angabe benützen, dass das Thermometer 300 Grm. Quecksilber fasste, welche Angabe auch mit den Dimensionen des Cylinders stimmt. Es ist demnach $pc = 9\cdot96$ und setzt man noch $r_1 = 1$ und $h = 7$, so reducirt sich obige Gleichung auf

$$0\cdot1982\, w_1 = H_1-H_2.$$

Man erhält nun nach der neuen Formel rechnend die Gleichung

$$0\cdot1982 \quad \frac{w_1-w_1'}{T_1^4-T_2^4} = A-A'$$

und wenn man

$$\frac{w_1-w_1'}{T_1^4-T_2^4} = 4624.10^{-15}.60$$

einführt,

$$A-A' = 5499.10^{-14}$$
$$(A-A')T_0^4 = 0\cdot3054$$

Nach Erhöhung dieser Zahl um 3 Procent folgt

$$AT_4^0 = 0\cdot3416$$

und endlich

$$H_{100}-H_0 = 0\cdot7818.$$

Unter Anwendung der Formel von Dulong und Petit erhält man für $H_{100}-H_0$ den etwas grösseren Werth 0·7961, für die Constante $m-m'$ den Werth 0·6745. Reducirt man die gefundenen Zahlen durch Division mit 0·88 auf den Fall einer berussten Fläche, so erhält man $H_{100}-H_0 = 0\cdot888$ oder $= 0\cdot905$ je nachdem man die neue Formel oder die von Dulong und Petit zur Berechnung der Beobachtungen verwendet.

kleinere der Emissionsvermögen von den beiden massgebend ist, so müsste in diesem Falle die geschwärzte Hülle ein kleineres Emissionsvermögen gehabt haben, als der Glascylinder des Thermometers.

Die Abkühlungsversuche von Dulong und Petit, von de la Provostaye und Desains sind nicht die einzigen, welche zur Berechnung der Wärmestrahlung dienen können. Ich will hier noch einige der von Despretz (Annales de chim. et de phys. VI. 184—201. 1817) über die Abkühlung von Metallkugeln gemachten Beobachtungen verwenden. Despretz bestimmte die Zeiten, welche ein in die Mitte der Kugeln eingeführtes Thermometer brauchte, um von 105° auf 95° zu sinken, wenn die zuerst erwärmten Kugeln in einem grossen Raume von 19° sich abkühlten und zwar war die Oberfläche der Kugeln entweder polirt oder geschwärzt. Die Kugeln waren von gleichem Durchmesser, welcher 67 Mm. betrug.

Die Abkühlungszeiten waren für die Kugel von

Eisen	340"	596"
Messing ..	285	521
Zink	265	473
Zinn	157	277

und zwar beziehen sich, wie es sich von selbst versteht, die kleineren Zeiten auf die geschwärzten, die grösseren auf die polirten Kugeln. Annähernd kann man die Quotienten aus 10 und diesen Zeiten als die Abkühlungsgeschwindigkeiten betrachten, welche der Temperatur 100° entsprechen und zunächst für den Fall der eisernen Kugel die Gleichung ansetzen:

$$\frac{r_1 cs}{3}\left(\frac{10}{340}-\frac{10}{596}\right)=(H_{100}-H_{19})-(H'_{100}-H'_{19})$$

worin, analog den früher gebrauchten Bezeichnungen, H das Emissionsvermögen der geschwärzten, H' jenes der polirten Kugel bedeutet. — Setzt man in diese Formel $r_1 = 3{\cdot}35$, $c = 0{\cdot}1138$, $s = 7{\cdot}788$, so erhält man

$$(H_{100}-H_{19})-(H'_{100}-H'_{19}) = 0{\cdot}7504$$

und wenn man das Emissionsvermögen des polirten Eisens $= 0{\cdot}23$ annimmt

$$H_{100}-H_{19} = 0{\cdot}974.$$

Temperaturen 100° und 0° entsprechen, nahezu dieselben Werthe erhält, ob man die Beobachtungen nach der Formel von Dulong und Petit oder nach der neuen Formel berechnet. Für die einzelnen Grössen H_{100} und H_0 ergeben sich aber nach den beiden Formeln ganz verschiedene Werthe. Nimmt man $H_{100} - H_0 = 1$, so folgt aus dem Gesetze von Dulong und Petit $H_0 = 0{\cdot}87$, aus dem Gesetze der vierten Potenzen hingegen $H_0 = 0{\cdot}40$. Wie schon bemerkt worden, haben letztere Zahlen zunächst nur eine hypothetische Bedeutung und ist eine Prüfung derselben nicht möglich, so lange nicht Ausstrahlungen gegen Körper von der absoluten Temperatur Null oder wenigstens von einer sehr niedrigen Temperatur gemessen sind. Ein derartiger Strahlungsvorgang findet thatsächlich zwischen der Erde und dem Weltraume statt und man kann eine untere Grenze für den Werth H_0 gewinnen, wenn man die Wärmemenge, welche die Erde von der Sonne empfängt mit derjenigen vergleicht, welche sie in den Weltraum abgeben muss, damit der Zustand, in welchem sie sich gegenwärtig befindet, herbeigeführt wird. Ich kann jedoch gegenwärtig auf diese Aufgabe, welche mit der Frage nach der sogenannten Temperatur des Weltraumes zusammenfällt, nicht eingehen, nur so viel will ich bemerken, dass nach der neuen Formel die Grösse der der Erde aus dem Weltraume zugestrahlten Wärme viel kleiner ausfallen muss, als sie von Pouillet aus der Formel von Dulong und Petit berechnet wurde, nach welcher Berechnung sie $^5/_6$ derjenigen ausmachen soll, welche die Erde von der Sonne empfängt.

III. Über die Versuche von Draper und Ericsson.

Die Annahme, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional ist, liefert auch noch für sehr hohe Temperaturen Resultate, welche den Beobachtungen ziemlich gut entsprechen, während die Formel von Dulong und Petit in solchen Fällen ganz Widersinniges gibt. Beobachtungen über die Wärmestrahlung bei hohen Temperaturen liegen übrigens nur wenige vor und sind ihre Ergebnisse, namentlich was die Bestimmung der Tempera-

Dividirt man die in der letzten Reihe stehenden Mittelwerthe durch die vierten Potenzen der zugehörigen absoluten Temperaturen, so erhält man der Reihe nach die Quotienten 21, 20, 20, 19, 18, 19, 21, 23, 24, 23, 25, 25. Diese gehen wohl sehr weit aus einander, bei der geringen Genauigkeit der Beobachtungen fallen jedoch diese Divergenzen nicht sehr schwer ins Gewicht. Um wie viel besser sich die neue Formel den Beobachtungen anschliesst, als die von Dulong und Petit aufgestellte kann man aus folgenden Daten ersehen. Nach der neuen Formel verhalten sich die bei den absoluten Temperaturen 800, 1200, 1600 ausgestrahlten Wärmemengen wie 1 : 5 : 16 und diese Verhältnisse treten auch im Groben aus der obigen Tabelle hervor. Nach der Formel von Dulong und Petit hingegen verhalten sich die in Rede stehenden Wärmemengen wie 1 : 21·5 : 462·2.

Ericsson hat sehr viele Versuche über die Wärmestrahlung bei hohen Temperaturen in der speciellen Absicht ausgeführt, das Gesetz von Dulong und Petit zu widerlegen. Die Resultate der Versuche hat er jedoch nicht genau discutirt. Ich will im Folgenden nur eine der Versuchsreihen, welche ihrer Anordnung nach wohl die originellste ist, eingehender behandeln. Dieselben Betrachtungen würden sich auch auf die anderen anwenden lassen.

Ericsson setzte auf einen grossen, bis zum Weissglühen erhitzten Eisenblock ein mit kurzen Füssen versehenes Calorimeter und bestimmte die Wärmemengen, welche der Block bei successive abnehmenden Temperaturen an das Calorimeter per Minute abgab. Die folgende Tabelle enthält die für bestimmte Temperaturdifferenzen des Blocks gegen das Calorimeter berechneten Wärmeabgaben des ersteren. Als Einheit der Wärmemenge ist jene angenommen, welche 1 Kilogr. Wasser bei der Erhöhung der Temperatur um 1° C. aufnimmt. Die in der Tabelle aufgeführten Wärmemengen entsprechen nicht direct den beobachteten. Die letzteren wurden durch den Inhalt der Bodenfläche dividirt und die Quotienten sind in die Tabelle eingesetzt, so dass diese die auf einen Quadratfuss der Bodenfläche bezogenen Wärmeaufnahmen enthält. Die Temperatur der umgebenden Luft, sowie die Anfangstemperatur des Calorimeters war 15°.

Die Tabelle ist aus Ericsson's Contributions to the centennial exhibition, pag. 49, genommen.

Diese Wärmemenge könnte vom Eisenblock dem Calorimeter zugestrahlt werden, wenn das Emissionsvermögen des Eisens jenem des Russes gleich käme und selbst diese Wärmemenge ist mehr als dreimal kleiner, als die aus den Beobachtungen abgeleitete 3·34. Nimmt man das Ausstrahlungsvermögen des Eisens = $^1/_4$ von jenem des Russes, so erhält man für die durch Strahlung an das Calorimeter abgegebene Wärme nur 0·29, also nur gleich dem zwölften Theile der beobachteten, 11 Theile von dieser kommen auf Rechnung der Leitung. Letztere findet zum Theile durch die zwischen dem Block und dem Calorimeter befindliche Luftschichte statt, zum grösseren Theile aber durch die Füsse des Calorimeters. Es hätten die Versuche auch ganz andere und leichter zu discutirende Resultate ergeben, wenn Ericsson das Calorimeter nicht auf den Block aufgesetzt, sondern über demselben an Schnüren aufgehängt und in der Luft schwebend gehalten hätte.

Zu einer Schätzung der bei diesen Versuchen auftretenden Wirkung der Strahlung kann man noch auf eine zweite Art gelangen. Wenn man nach der Formel der vierten Potenzen das Verhältniss der Wärmemengen berechnet, welche von einem Körper bei den Temperaturen 215° und 115° einem anderen von 15° zugestrahlt werden, so findet man dasselbe = 3·16. Die beiden in der Ericsson'schen Tabelle stehenden Zahlen 3·1 und 6·5 geben einen viel kleineren Quotienten, weil dieselben neben der Wirkung der Strahlung auch noch jene der Leitung darstellen, welche viel langsamer mit der Temperatur steigt als erstere. Man kann dieselbe in erster Annäherung geradezu der Temperaturdifferenz proportional setzen und annehmen, dass die an der Zahl 6·5 wegen der Wärmeleitung vorzunehmende Correction $2x$ beträgt, wenn die an der Zahl 3·1 anzubringende Correction x ist. Man kann nun die Forderung, dass

$$\frac{6{\cdot}5-2x}{3{\cdot}1-x} = 3{\cdot}16$$

sein soll, zur Bestimmung von x benützen und erhält $x = 2{\cdot}84$. Diese Zahl von 3·1 subtrahirt, gibt 0·26 als Mass für die Strahlung, und stimmt diese Grösse mit der früheren, welche unter der

$= 1$, das anderemal aber $= 0{\cdot}1$ annahm. Nimmt man die Constante m der Formel von Dulong und Petit $= 0{\cdot}87$, welcher Werth auch den Versuchen von Dulong und Petit, wenn dieselben wegen der Wärmeleitung der Luft corrigirt werden, entspricht, so erhält man für die Temperatur der Sonne etwas grössere Zahlen (1497° und 1797°) und dieselben würden sich noch etwas erhöhen, wenn man die neueren Beobachtungen benützte, nach welchen die Sonnenwärme viel grösser ist, als Pouillet sie fand. Nach den Bestimmungen von Violle ist dieselbe 1·44mal grösser, und dem entsprechend wachsen die Zahlen für die Temperatur der Sonne auf 1544° und 1844°, und wenn man das Emissionsvermögen derselben dem des Silbers, also $= \frac{1}{40}$ annimmt, erhält man die Zahl 2025°.

Nimmt man dagegen die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional an und setzt die von einem Quadratcentimeter einer schwarzen Fläche bei 0° in der Minute ausgesendete Wärmemenge $= 0{\cdot}4$, so erhält man aus der von Pouillet für die Sonnenwärme gegebenen Zahl für die Temperatur der Sonne den Werth 5586°, wenn man ihr Emissionsvermögen $= 1$, und den Werth 10147°, wenn man dasselbe $= 0{\cdot}1$ setzt. Benützt man die von Violle angegebene Grösse der Sonnenwärme, so erhöhen sich die eben angegebenen Werthe um 10 Procent.

Soret beobachtete die Temperaturerhöhungen, welche das Thermometer seines Actinometers unter der Wirkung der Sonnenstrahlen und unter der Wirkung einer in der Flamme der Leuchtgas-Sauerstofflampe erhitzten Scheibe von Zirkon oder Magnesia erhielt, wobei die Scheibe vom Thermometer aus gesehen dieselbe scheinbare Grösse hatte als die Sonne. Die Temperaturerhöhungen waren in den zwei Fällen 14°5 und 0·5, verhielten sich also wie 29:1. Nimmt man an, dass die Wärmeabgaben des Thermometers, wie die Überschüsse seiner Temperaturen über die der Umgebung sich verhalten, so folgt, dass das Thermometer von der Sonne 29mal so viel Wärme erhielt als von der Zirkonscheibe und es würde etwa $\frac{3}{2}.29 = 43{\cdot}5$mal so viel von der Sonne erhalten haben, wenn in lenden Körpers, θ jene der Umgebung bedeuten. Diese Formel soll auch das Ergebniss theoretischer Betrachtungen sein. Die Abhandlung selbst habe ich noch nicht einsehen können, in den mir bekannt gewordenen Auszügen sind diese Betrachtungen nicht mitgetheilt, ebenso auch nicht die Beobachtungen über die Strahlung bei höheren Temperaturen, so dass ich die Frage, ob die von mir aufgestellte Formel auch zur Darstellung dieser Beobachtungen geeignet sei, nicht behandeln kann.

Bezüglich der Sonnentemperatur sei bemerkt, dass von Rosetti für die untere Grenze derselben der Werth 9965°4 angegeben wird.