XV. *Ableitung des Stefan'schen Gesetzes*[1]), *betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie;*

von Ludwig Boltzmann in Graz.

Maxwell hat aus seiner electromagnetischen Lichttheorie das Resultat abgeleitet, dass ein Strahl von Licht oder strahlender Wärme auf die Flächeneinheit bei senkrechter Incidenz einen Druck ausüben muss, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit Aether infolge der Lichtbewegung enthaltenen Energie. Sei ein absolut leerer Raum rings von für Wärmestrahlung undurchlässigen Wänden von der absoluten Temperatur t umgeben; bezeichnen wir die in der Volumeneinheit Aether infolge der Wärmestrahlung enthaltene Energie mit $\psi(t)$, so müssen wir bedenken, dass nicht alle Wärmestrahlen senkrecht auf die gedrückte Wand auffallen. Am einfachsten ist es, da analog einer Betrachtungsweise, welche Krönig[3]) auf die Gastheorie anwandte, den Raum als Würfel zu denken, dessen Seiten parallel drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sind. Ein dem Mittelzustand am besten entsprechendes Resultat erhält man, wenn man annimmt, dass je ein Drittel der Wärmestrahlung parallel je einer der drei Coordinatenaxen sich fortpflanzt. Es wird dann auf jede Seitenfläche nur ein Drittel der gesammten Strahlen drückend wirken, und der Druck auf die Flächeneinheit der Wand wird nach Maxwell's Gesetz sein:

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\psi(t);$$

man kann diese Formel auch durch folgende Ueberlegung finden. Maxwell's Resultat gilt, wenn der Strahl senkrecht auf die gedrückte Fläche auffällt und von derselben absor-

1) Stefan, Wien. Ber. **79.** p. 391. 1879.

2) Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, Clarendon Press vol. II Artikel 792. p. 391. 1873.

3) Krönig, Grundzüge der Theorie der Gase. Berlin bei A. W. Hain. Pogg. Ann. **99.** p. 315. 1856.

birt wird. Würde er nahe senkrecht auffallen und unter demselben Winkel reflectirt, so wäre der Druck der doppelte; bildete er dagegen mit der Normalen den Winkel ϑ und würde mit gleicher Intensität unter demselben Winkel reflectirt, so wäre analog wie beim Stosse eines schief auffallenden Gasmolecüles blos die lebendige Kraft der normal zur gedrückten Fläche entfallenden Componente der Bewegung massgebend, welche gleich der mit $\cos^2\vartheta$ multiplicirten gesammten lebendigen Kraft des Strahles ist. (Sowohl das Bewegungsmoment als auch die auftreffende Menge erscheint mit $\cos\vartheta$ multiplicirt). Bezeichnen wir daher die gesammte lebendige Kraft der Strahlen in der Volumeneinheit wieder mit $\psi(t)$, so ist die lebendige Kraft derjenigen Strahlen, deren Winkel mit der Normalen zur gedrückten Fläche zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, und welche sich in der Richtung gegen die gedrückte Fläche hin fortpflanzen, gleich $\frac{1}{2}\psi(t)\sin\vartheta\, d\vartheta$; genau ebenso gross ist die lebendige Kraft der Strahlen, welche sich längs derselben Geraden, aber von der gedrückten Fläche hinweg, fortpflanzen. Die gesammte Energie beider Strahlengattungen zusammen ist daher $\psi(t)\sin\vartheta\,.\,d\vartheta$, und sie üben nach dem oben Gesagten auf die Flächeneinheit den Druck $\psi(t)\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta$ aus. Um alle überhaupt vorhandenen Strahlen zu erhalten, haben wir diesen Ausdruck von Null bis $\pi/2$ zu integriren, was den schon früher angegebenen Werth $\frac{1}{3}\psi(t)$ liefert.

In meinem Aufsatze über eine von Bartoli entdeckte Beziehung der strahlenden Wärme zum zweiten Hauptsatze[1]) habe ich gezeigt, dass sich zwischen den beiden Functionen ψ und f[2]) aus dem zweiten Hauptsatze die Beziehung ergibt $f = t\int\psi\, dt/t^2$, deren Differential lautet: $t\,df - f\,dt = \psi\, dt$, wenn also, wie aus der electromagnetischen Lichttheorie folgt, $f = \frac{1}{3}\psi$ gesetzt wird, so erhält man: $t\,d\psi/3 = 4\psi\, dt/3$ und durch Integration $\psi = ct^4$, ein Gesetz, welches bekanntlich schon vor längerer Zeit von Stefan empirisch aufgestellt

1) Boltzmann. Wied. Ann. 22. p. 38. 1884.

2) $\psi(t)$ ist die dort mit $4\varphi(t)/cJ$ bezeichnete Grösse, vgl. p. 35.

und in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden wurde. Es folgt also aus der electromagnetischen Lichttheorie und dem zweiten Hauptsatze unmittelbar das Stefan'sche Gesetz der Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, ein gewiss bemerkenswerthes Resultat, wenn auch sicher niemand den vielfach provisorischen Charakter der hier durchgeführten Rechnungen verkennen wird.

Man sieht leicht, dass sich auch umgekehrt aus dem zweiten Hauptsatze und dem Stefan'schen Strahlungsgesetze die Folgerung ergibt, dass in einem von Wärme undurchlässigen und gleich temperirten Wänden umgebenen Raum der Druck der Wärmestrahlung auf die Flächeneinheit gleich dem dritten Theile der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie der Strahlung ist, dass also ein Strahl, welcher senkrecht auf eine ebene Fläche vom Flächeninhalte Eins auffällt, auf diese einen Druck ausübt, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit des Strahles enthaltenen Energie, sobald er von der gedrückten Fläche absorbirt wird; wird er dagegen von dieser mit ungeschwächter Intensität reflectirt, so ist der Druck doppelt so gross, also gleich der im einfallenden und reflectirten Strahle zusammen auf die Volumeneinheit entfallenden Energie. Nach der Emissionstheorie müsste der Druck, wie mir scheint, entgegen der von Bartoli l. c. angeführten Ansicht Hirn's in allen diesen Fällen doppelt so gross sein, als es hier gefunden wurde. Es scheint mir übrigens, dass man durch ähnliche Hypothesen, wie sie Kirchhoff in seiner bekannten Abhandlung über Gleichheit des Absorptions- und Emissionsvermögens[1]) aufstellte, auch beweisen könnte, dass dieses Gesetz für vollkommen schwarze Körper, nicht blos für die gesammte ausgestrahlte Wärmemenge, sondern auch für jede einzelne Strahlengattung für sich gelten muss, sodass bei allen Temperaturen die von einem schwarzen Körper ausgesandte Wärme einer gewissen Strahlengattung der gleiche Bruchtheil der gesammten aus-

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. **109.** p. 275. 1860. Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1861.

S. 294 befindet sich vor S.291

 aus: *Ann. d. Phys. u. Chem.* 2

gesandten Wärme sein müsste, wie unter anderen Lecher[1]) vermuthete.

Ich erwähne hier noch eine etwas einfachere Ableitungsweise der Gleichung zwischen den Functionen ψ und f aus dem Bartoli'schen Processe. Sei in einem Hohlcylinder von absolut schwarzer, Wärme undurchlässiger Umhüllung ein eben solcher Stempel S verschiebbar, derselbe berühre anfangs die Basis B des Cylinders, welche den Flächeninhalt Eins und die Temperatur t_0 haben soll und entferne sich von derselben bis zur Distanz a (er befinde sich rechts von der Basis B). Die ganze, in Form von Strahlung zwischen B und S vorhandene Wärme $a\,.\,\psi(t_0)$, sowie die ganze, zur Bewegung von S aufgewendete Wärme $a f(t_0)$ werde von B geliefert. Die Wärme denken wir uns in Arbeitsmaass gemessen. Nun werde der Raum zwischen B und S durch einen zweiten Stempel T von B abgesperrt, sodass sich sein Zustand jetzt adiabatisch ändert, und der Stempel S, welcher, sowie die Mantelfläche des Cylinders, nur verschwindend wenig Wärme enthalten soll, bewege sich noch um das Stück x weiter. Für diese Zustandsänderung ist dann $d[(a+x)\psi(t)] = -f(t)\,dx$. Der Raum rechts von S und die ihn begrenzende Gegenfläche G des Cylinders sollen immer die schliesslich auch links entstehende Temperatur t gehabt haben. Alle rechts vom Stempel S sowohl durch Arbeitsleistung als auch durch Volumenverkleinerung gewonnene Wärme $(a+x)[\psi(t)+f(t)]$ soll von dieser Gegenfläche G aufgenommen worden sein. Der Process ist umkehrbar; es ist also:

$$(a+x)[\psi(t)+f(t)]\,/\,t = a[\psi(t_0)+f(t_0)]\,/\,t_0 = c.$$

Wir wollen nun a und t_0, somit auch c als constant, x und t als veränderlich betrachten, addirt man zur vorigen Gleichung beiderseits $d[(a+x)f(t)]$, so ergibt sich mit Beachtung des Differentials der letzten Gleichung das Resultat:

$$\psi(t)\,dt + f(t)\,dt = t\,df(t),$$

was mit der obigen Gleichung übereinstimmt.

---

1) Lecher, Wien. Ber. 85. p. 441. 1882. Wied. Ann. 17. p. 477. 1882.

letzte Seite vorgezogen

aus: *Ann. d. Phys. u. Chem.* 258 (=22 3. Folge) (1884) 291-294.