

Kommentierte Rohübersetzung von **Die Wirkung von Kollisionen auf das monochromatische Strahlungsgleichgewicht**

Milne, Edward Arthur
Rohübersetzung
Dipl.-Physiker Jochen Ebel

22. April 2011

Inhaltsverzeichnis

0	Kopfdaten	2
0.1	Bitte	2
0.2	Vereinbarungen	2
0.3	Vorbemerkungen des Übersetzers	3
0.3.1	Gaskugel »Stern« und Erdatmosphäre	3
0.3.2	Umkehrschicht	3
0.3.3	Strahlungsberechnung und LTE	3
0.3.4	Stauseeanalogie	4
0.3.5	Irrtum	5
1	Zusammenfassung	6
2	Begriffsdefinition lokales thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)	6
3	Begriffsdefinition mono-chromatisches Strahlungsgleichgewicht	7
4	Vereinigung beider Gleichgewichtstypen	7
5	Übertragungsgleichung	9
6	Planckgesetz	10
7	Stationaritätsbedingung	11
8	Übertragungsgleichung bei stationärem Zustand	11
9	Der Weg ins Sterninnere	12

10	Absorption und Streuung	13
11	Zahlenbeispiel	13
12	Größere Gültigkeit	14
13	Möglicher η-Verlauf	15
14	Fraunhofer Linien	15
15	Linienformen	16
16	Streuquerschnitt	16
17	Schlußfolgerungen	16
18	Verzeichnisse	17
	Abbildungsverzeichnis	17
	Tabellenverzeichnis	17
	Literaturverzeichniss	17

0 Kopfdaten

Die Wirkung von Kollisionen auf das monochromatische Strahlungsgleichgewicht

The Effect of Collisions on Monochromatic Radiative Equilibrium

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society

verbreitet durch: NASA Astrophysics Data System

April 1928

Edward Arthur [Milne, 1928a]

0.1 Bitte

Der Übersetzer bittet um eine Mitteilung, falls jemand irgendeine Stelle findet, die er als zu frei oder fehlerhaft übersetzt empfindet <mailto:JEbel@t-online.de>.

0.2 Vereinbarungen

Die Kommentierung der Übersetzung, muß sich von der Übersetzung für den Leser unterscheiden. In diesem Paper wird die Unterscheidung durch Farbgebung gemacht:

schwarz: der übersetzte Text

blau: Kommentierung

0.3 Vorbemerkungen des Übersetzers

0.3.1 Gaskugel »Stern« und Erdatmosphäre

Milne schrieb das nachfolgende Paper zum Zweck der Strahlungsuntersuchung von Sternen. Deshalb sind Beispiele bei hohen Temperaturen (6000 °C) angegeben. Milnes Betrachtungen gelten auch bei niedrigeren Temperaturen, sein Text ist dafür entsprechend zu modifizieren. So liegen die Stoffe bei hohen Temperaturen meist in atomarer Form vor, oft sogar in ionisierter Form. Deswegen verwendet Milne für die Gasteilchen immer den Begriff »Atome«. Bei niedrigeren Temperaturen liegen viele Gasteilchen in Molekülform vor (O₂, CO₂ usw.), deswegen wäre in dem Paper das Wort »Atome« konsequent durch »Moleküle« zu ersetzen, das auch Atome mit einschließt.

0.3.2 Umkehrschicht

In Milnes Paper wird oft der Begriff Umkehrschicht verwendet, der vielleicht nicht so bekannt ist. Deshalb das nachfolgende Zitat aus [Schumacher, 2000?]

Die blendendhelle Photosphäre (Lichthülle) bildet die Licht- oder Spiegelglanzschicht der Sonne. Unterhalb der plastischen Sonnenoberfläche liegende Schichten sind auch infolge einer Absorptionswirkung nicht sichtbar. Diese Lichtglanzschicht reicht bis zu 500 km Höhe an die 12 000 km hohe Chromosphäre (griech. Farbschicht). Die Grenze zwischen Photo- und Chromosphäre trägt die Bezeichnung »Umkehrschicht«, in der die sog. Fraunhoferschen Linien des Sonnenspektrums sichtbar werden.

Der Begriff »Umkehrung« kommt daher, dass üblicherweise die Spektrallinien heller sind als die benachbarten Wellenlängen. Bei den Fraunhoferlinien kommt es zu einer Umkehrung: die Spektrallinien sind dunkler als die benachbarten Wellenlängen, wo die Photosphäre die Helligkeit bestimmt.

0.3.3 Strahlungsberechnung und LTE

Eine wesentliche Rolle bei der Strahlungsberechnung spielt die Strahlungstransportgleichung. Ein phänomenologischer Ansatz (z. B. [Schuster, 1905]) oder eine molekulare Begründung wie in diesem Paper von Milne führen auf die gleiche Form.

In der Erdatmosphäre herrscht unten ein so großer Druck, daß die Strahlungsverhältnisse am besten durch das LTE (Abschnitt 2 auf Seite 6) beschrieben werden¹, nach oben nimmt der Druck ab und die Strahlungsbeeinflussung geschieht zwar auch weiter durch Absorption und Emission – aber da zwischen Absorption und Emission kaum eine Wechselwirkung mit dem Wärmebad² erfolgt, emittieren die Moleküle mit (fast) derselben Frequenz (innerhalb der Planckschen Unschärferelation), wie sie absorbiert haben. Weil keine Zusammenstöße mit anderen Molekülen erfolgten, müssen das Molekül und die Photonen nach einem Absorptions- mit anschließendem Emissionsvorgang im gleichen Energie- und Impulszustand wie vor dem Absorptions- mit anschließendem Emissionsvorgang sein. Da die äquivalente Masse eines Photons klein ist gegenüber der Molekülmasse, ist die Frequenzänderung vernachlässigbar

¹Bei Absorption und Emission im LTE hat in der Regel die emittierte Intensität eine andere Frequenzabhängigkeit als die absorbierte Intensität.

²Der Fachbegriff eines »Wärmebades« ist die idealisierte Vorstellung einer Systemumgebung, die eine konstante Temperatur bereitstellt – hier real das Gas mit seinen vielen Kollisionen.

– auch wenn das emittierte Photon eine andere Flugrichtung hat als das vorher absorbierte Photon. Zum Nachweis dieser Tatsache die nachfolgende Betrachtung.

Die Betrachtung erfolgt im Ruhesystem des Moleküls. Ein Ruhesystem bezüglich eines Teilchens bedeutet, das sich der Nullpunkt des Koordinatensystems mit derselben Geschwindigkeit und Richtung wie das Teilchen (vor dem Stoß) bewegt, so daß das Teilchen im Koordinatenursprung des Koordinatensystems bleibt. Das Ruhesystem empfiehlt sich deshalb, weil die Dopplerverschiebung unberücksichtigt bleiben kann.

Fliegt ein Photon auf das vorgenannte Molekül, so hat zunächst nur das Photon einen Impuls ($h\nu/c$) und eine bestimmte Energie ($h\nu$, ν Photonen-Frequenz). Nach der Absorption hat zunächst das angeregte Molekül den Impuls des Photons. Nach der Emission des Photons bleiben Gesamtimpuls und Gesamtenergie erhalten. Wird ein Photon emittiert und zwar in der Richtung des absorbierten Photons, ergibt die gemeinsame Erhaltung von Gesamtimpuls und Gesamtenergie für das Photon die Frequenzerhaltung des Photons und die Geschwindigkeit Null für das Molekül. Um so mehr sich die Richtung des emittierten Photons von der Richtung des absorbierten Photons unterscheidet, um so größer werden die Änderungen. Der Extremwert ist dementsprechend, wenn die beiden Photonenrichtungen entgegengesetzt sind (negativer Impuls des emittierten Photons gegenüber dem Impuls des absorbierten Photons). Dann gilt:

$$h\nu' + \frac{m}{2}v^2 = h\nu \Rightarrow h\nu' = h\nu - \frac{m}{2}v^2 \quad \text{Energiebilanz}$$

$$-\frac{h\nu'}{c} + mv = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow h\nu' = mvc - h\nu \quad \text{Impulsbilanz}$$

$$v^2 + 2vc - 4\frac{h\nu}{m} = 0$$

$$v = c \left[\sqrt{1 + 4\frac{h\nu}{mc^2}} - 1 \right] \quad \text{Lösung}$$

$$h\nu' = mc^2 \left[\sqrt{1 + 4\frac{h\nu}{mc^2}} - 1 \right] - h\nu \quad \text{neue Frequenz}$$

$$\approx mc^2 \left[1 + 2\frac{h\nu}{mc^2} - 2\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2 - 1 \right] - h\nu$$

$$= mc^2 \left[2\frac{h\nu}{mc^2} - 2\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2 \right] - h\nu$$

$$= 2h\nu - 2h\nu\frac{h\nu}{mc^2} - h\nu$$

$$= h\nu - 2h\nu\frac{h\nu}{mc^2} = h\nu \left[1 - 2\frac{h\nu}{mc^2} \right]$$

Da im Infrarotbereich selbst für die Protonenmasse der Quotient $h\nu/(mc^2)$ schon bei 10^{-10} liegt, ist die Frequenzverschiebung vernachlässigbar. Das bedeutet: Wenn der Umweg über das Wärmebad vernachlässigbar ist, bleibt die Intensitätsverteilung über der Frequenz erhalten, das LTE ist verlassen und das mono-chromatische Strahlungsgleichgewicht gilt (Abschnitt 3 auf Seite 7).

0.3.4 Stauseeanalogie

Zur Verdeutlichung der Verhältnisse an einem bestimmten Ort (besonders wenn dort LTE-Verhältnisse herrschen – in der Erdatmosphäre bis ca. 60 km Höhe) sind die Strahlungs-

verhältnisse sehr schön mit einem Stausee vergleichbar. Dem Wärmeinhalt des Gases (Summe der kinetischen Energien der Gasmoleküle) kann als Analogon ein Stausee zugeordnet werden, wobei die Höhe des Wasserstandes der Temperatur entspricht³.

Als »Zuflüsse« hat der Stausee absorbierte Strahlung, wobei die Strahlung sowohl von unten als auch von oben (Gegenstrahlung) kommt. Ein weiterer Zufluß ist konvektiv herangeführte Wärme in sensibler und latenter Form⁴. Wenn ein Stausee nur Zuflüsse und keine Abflüsse hätte, würde der Wasserspiegel im Stausee immer weiter steigen – eine absurde Vorstellung. Die Abflüsse aus dem Stausee »Wärme« ist die Abstrahlung (Emission), die bereits [Einstein, 1916 bzw. 1917] (ebenso wie die Absorption) beschrieben hat. Die Emission erfolgt in alle Richtungen gleichmäßig und mit gleicher Intensität – das aber trotzdem die Intensität der Gegenstrahlung an der Erdoberfläche und die Intensität der Abstrahlung in den Weltraum unterschiedlich sind hat seine Ursache in den unterschiedlichen Temperaturen der Atmosphäre. Die Abflüsse durch Emission müssen dabei die gleiche Größe wie die Zuflüsse haben - ansonsten könnte der Wasserspiegel im Stausee nicht auf konstanter Höhe bleiben. Dabei kann ggf. die Höhe des Wasserspiegels im Stausee nur im zeitlichen Mittel konstant sein, d.h. nur im zeitlichen Mittel ist Zufluss gleich Abfluss, zeitweise kann mehr Zufluss als Abfluss sein bzw. umgekehrt. Dann steigt (sinkt) der Wasserspiegel im Stausee (Temperatur) zeitweise.

0.3.5 Irrtum

Ein Irrtum sollte auch erwähnt werden. Bei der Absorption von Strahlung werden die Moleküle angeregt (sie kommen in den Zustand 2) und im LTE wird der größte Teil der dadurch angeregten Moleküle seine Energie durch (siehe Absatz nach Gleichung (9 auf Seite 8)) »Kollision zweiten Art« (Super-Elastik-Kollision) an das Wärmebad abgeben. Und hier blenden manche ab (die Höhe des Wasserspiegels im »Stausee« müßte also laufend steigen). Das z. B. in der Troposphäre die »Kollision erster Art« (inelastischer Stoß) häufiger stattfinden und durch diese Kollisionen mehr Anregungen als Abregungen erfolgen, nehmen manche einfach nicht zur Kenntnis. Durch diese Vorgänge wird die Strahlung nach oben und der konvektive Wärmetransport (sensibel und latent) nach oben zu einem großen Teil in die Strahlung nach unten (Gegenstrahlung) umgelenkt. Direkt mit der Nettostrahlung (Differenz zwischen Aufwärts- und Abwärtstrahlung) ist die Berechnung nicht zu machen – das trifft praktisch für alle Strahlungsberechnungen zu – sondern nur für alle Teilstrahlen separat (zumindest indirekt⁵).

Warum hauptsächlich nach unten? Kein Körper mit einer bestimmten Temperatur T kann stärker strahlen, als ein Schwarzkörper mit dieser Temperatur. Da nach oben die Temperatur abnimmt (in der Troposphäre) kann die Strahlungsintensität nach oben nur abnehmen. Wo bleibt aber die Energie, die ursprünglich in der nach oben strömenden Energie (Strahlung und konvektiver Wärmetransport) war? Sie kann ja nicht ins Nirwana verschwinden – sie geht in die Gegenstrahlung. Anders geht es nicht, sonst wäre der Energierhaltungssatz verletzt.

³Die Stauseeanalogie illustriert auch den Fachbegriff des Wärmebades - ein großer Stausee, der nicht mit Wasser sondern Wärme gefüllt ist. Geringe zu- und Abflüsse von Wärme verändern den »Wärmespiegel« (Temperatur) im »Wärmestausee« nur wenig - im Idealfall gar nicht.

⁴sensible Wärme = fühlbare Wärme in Form der Temperatur, latente Wärme ist die im Wasserdampf »verborgene« Wärme, die frei wird, wenn der Wasserdampf zu Wasser kondensiert.

⁵Indirekt heißt, daß im Rechengang alle Teilstrahlen irgendwie verbunden sind, obwohl separat gerechnet wird. Beispiel:

$$\underbrace{N}_{\text{Nettostrahlung}} \sim \underbrace{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}_{\text{Nettostrahlung}} = \underbrace{\sigma T_1^4}_{\text{Hinstrahlung}} - \underbrace{\sigma T_2^4}_{\text{Gegenstrahlung}}$$

1 Zusammenfassung

In zwei neueren Arbeiten [Milne, 1927], [Milne, 1928b] bin ich auf dem Umstand eingegangen, dass wir bei Betrachtung der Verhältnisse auf dem Wege vom Inneren eines Sterns nach außen bis zum höchsten Niveau der stellaren Atmosphäre einen Übergang finden vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht zum monochromen Strahlungsgleichgewicht. Es ist das Ziel dieser Arbeit diesen Übergang im Detail verfolgen hinsichtlich der Strahlungsübertragung und eine Gleichung aufzustellen, die bereits in einer früheren Arbeit verwendet wurde [Milne, 1927, p. 702, Gleichung (22 auf Seite 12)].

Wir werden beweisen, dass⁶ im Falle, daß die Dichte gegen Null geht, d.h. in Richtung zur Außenseite eines Sterns, Absorption und Emission dem monochromen Strahlungsgleichgewicht entsprechen und daß im entgegengesetzten Fall (dem Streben der Dichte gegen unendlich), d.h. in Richtung des Sterninneren, Absorption und Emission dem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen. Der Übergang zwischen beiden Grenzfällen hat seine Ursache in der sich ändernden Wirkung von Kollisionen zwischen angeregten und nicht-angeregten Atomen bzw. der Änderung des Verhältnisses von Planck- zu Maxwell-Vorgängen.

2 Begriffsdefinition lokales thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)

Es ist zunächst erforderlich, unsere Begriffe zu definieren. Die Materie in der Umgebung eines Punktes P soll im *lokalen thermodynamischen Gleichgewicht* bei der Temperatur T sein, wenn ihre Emission von Strahlung die gleiche ist, wie sie im strengen thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T wäre, sie ist also die gleiche, als ob sie in einer einheitlichen Gehäuse-Temperatur bei Temperatur T eingeschlossen wäre. Dann gilt das Kirchhoffsche Gesetz streng. $4\pi\epsilon_\nu$ sei die gesamte Emission von Strahlung im Bereich $(\nu, \nu + d\nu)$ während der Zeitdauer dt und pro Masseneinheit. $B_\nu = (2h\nu^3/c^2) (e^{h\nu/(kT)} - 1)^{-1}$ sei die universelle Kirchhoff-Funktion, also die Intensität der ν -Strahlung bei einer einheitlichen Gehäuse-Temperatur T . k_ν sei der Absorptionskoeffizient. Dann besagt das Kirchhoffsche Gesetz, dass

$$\epsilon_\nu = k_\nu B_\nu \quad (1)$$

Betrachten wir nun die Strahlungsübertragung durch Materie, die im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht ist. I_ν sei die Intensität der ν -Strahlung in einer Richtung durch das Element der Länge ds gegeben. Dann ist die übliche Darstellung der Übertragungsgleichung

$$\frac{dI_\nu}{\rho ds} = -k_\nu I_\nu + \epsilon_\nu \quad (2)$$

Bei Verwendung von Gleichung (1), wird daraus

$$\frac{dI_\nu}{\rho ds} = -k_\nu I_\nu + k_\nu B_\nu \quad (3)$$

⁶Zumindest in den Fällen, bei denen es möglich ist, diese vollständig zu analysieren

3 Begriffsdefinition mono-chromatisches Strahlungsgleichgewicht

Wir betrachten jetzt das monochrome Strahlungsgleichgewicht. Die Materie in der Umgebung eines Punktes P soll hinsichtlich der ν -Strahlung im *mono-chromatischen Strahlungsgleichgewicht* sein und re-emittiert alle ν -Strahlung, die sie absorbiert. Die gesamte Absorption pro Masseneinheit ist

$$k_\nu \int I_\nu d\omega$$

wobei I_ν die einfallende Intensität der ν -Strahlung ist, wobei die Integration über den gesamten Raumwinkel genommen wird; I_ν ist natürlich eine Funktion der Richtung auf P . Damit wird die Übertragungsgleichung der ν -Strahlung

$$\frac{dI_\nu}{\rho ds} = -k_\nu I_\nu + k_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} \quad (4)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die absorbierte Strahlung wieder gleichmäßig in alle Richtung emittiert wird.

Gleichung (3 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (4) sind natürlich die klassischen Gleichungen von Schuster und Schwarzschild.

4 Vereinigung beider Gleichgewichtstypen

Wir schlagen nun vor, eine solche Übertragungsgleichung der Strahlung zu entwickeln, bei der wir uns nicht auf die beiden Grenzfälle beschränken wollen. Also weder nur auf das lokale thermodynamische Gleichgewicht oder nur auf das monochromatische Strahlungsgleichgewicht. Wir stellen nur die Bedingung, dass der Besetzungszustand am Ort P ein **zeitlich stabiler** Zustand ist in Bezug auf die Verteilung der Atome in P unter ihren stationären Zuständen. Wir werden zeigen, dass es unter weiteren Einschränkungen scheint, dass bei geringen Dichten die Übertragungsgleichung zur Form Gleichung (4) und bei hohen Dichten zur Form Gleichung (3 auf der vorherigen Seite) tendiert.

Dazu betrachten wir den Fall einer Gruppe von Atomen einer bestimmten Art an einem Ort mit zwei und nur zwei stationären Zuständen. Diese Gruppe kann eine beliebige Anzahl von Atomen anderer Arten, auch eine beliebige Anzahl von Ionen und Elektronen, enthalten. Wir bezeichnen den Zustand geringerer Energie als Grundzustand (Besetzungszustand 1), den Zustand mit höherer Energie als angeregten Zustand (Besetzungszustand 2). n_1 sei die Anzahl der Atome pro cm^3 im Zustand 1, n_2 die Anzahl im Zustand 2, beide am Ort P . $A_{2 \rightarrow 1}$, $B_{1 \rightarrow 2}$, $B_{2 \rightarrow 1}$ seien die üblichen Einsteinschen Wahrscheinlichkeits-Koeffizienten, definiert in Bezug auf die Intensität der Strahlung (nicht der Dichte)⁷. Wenn q_1, q_2 die statistischen Gewichte der Zustände 1 und 2 sind, so haben wir die Einstein-Beziehungen

$$\frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{q_1}{q_2} \quad (5)$$

⁷Dies bedeutet, dass z. B. $B_{1 \rightarrow 2} I_\nu dt$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Atom während der Zeit dt unter dem Einfluss von isotroper Strahlung der Intensität I_ν Photonen absorbiert. Einstein und die meisten anderen Autoren benutzen einen anderen Koeffizienten, den wir als $B'_{1 \rightarrow 2}$ bezeichnen, so dass $B'_{1 \rightarrow 2} \rho_\nu dt$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist, dabei ist ρ_ν die **Energie-Dichte** der ν -Strahlung (**nicht die Materie-dichte**). Für isotrope Strahlung ist $\rho_\nu = 4\pi I_\nu / c$, so dass $B_{1 \rightarrow 2} = (4\pi/c) B'_{1 \rightarrow 2}$ ist. Es scheint, dass $B_{1 \rightarrow 2}$ viel bequemer zu schreiben ist, als $B'_{1 \rightarrow 2}$, wenn wir Erweiterungen auf nicht-isotrope Felder betrachten wollen – **was der Realität von Strahlungsfeldern in Sternen und Atmosphären besser entspricht**.

und

$$\frac{B_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1}{q_2} \quad (6)$$

Es wird einfacher, wenn abgekürzt wird⁸

$$\sigma = \frac{2h\nu^3}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} = \sigma \frac{q_1}{q_2} \quad (7)$$

$\alpha(\nu)$ sei der Atom-Absorptions-Koeffizient für ein Atom im Zustand 1. Dann ist es leicht⁹ zu zeigen, dass etwa gilt

$$\int \alpha(\nu) d\nu = \frac{B_{1 \rightarrow 2} h\nu}{4\pi} \quad (8)$$

wobei das Integral durch den Frequenzbereich begrenzt wird, in dem das Atom absorbieren kann. Zur Vereinfachung unserer Arbeit setzen wir dies als gleichmäßige Absorption innerhalb eines äquivalenten Intervalls $\Delta\nu$ an und schreiben dementsprechend

$$\alpha_\nu \Delta\nu = \frac{B_{1 \rightarrow 2} h\nu}{4\pi} \quad (9)$$

wobei α_ν der mittlere atomare Absorptionskoeffizient im Intervall $(\nu - \frac{1}{2}\Delta\nu, \nu + \frac{1}{2}\Delta\nu)$ ist.

Wir führen nun weitere Wahrscheinlichkeits-Koeffizienten¹⁰ $b_{1 \rightarrow 2}$, $a_{2 \rightarrow 1}$ ¹¹ ein, um die Auswirkungen von Kollisionen zwischen angeregten und nichtangeregten Atomen in den Zuständen 1 bzw. 2 zu berücksichtigen. $b_{1 \rightarrow 2} dt$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom der betreffenden Art, das im Zustand 1 ist, durch eine Kollision mit einem Atom, Ion oder Elektron der Gruppe zum Zustand 2 während einer Zeit dt angeregt wird. $a_{2 \rightarrow 1} dt$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom, das im Zustand 2 ist, zum Zustand 1 während einer Zeit dt durch eine Kollision abgeregt wird. In der ersten Art der Kollision, die als »Kollision erster Art« oder inelastischer Stoß bekannt ist, wird die Anregungsenergie $h\nu$ aus der kinetischen Energie der kollidierenden Teilchen entnommen. Bei der zweiten Art der Kollision, die als »Kollision zweiten Art« oder Super-Elastik-Kollision bekannt ist, springt das kollidierende Teilchen mit einer zusätzlichen kinetischer Energie der Größe $h\nu$ weg, die von der Energie des Teilchens im Zustand 2 stammt. Gerade durch diesen Energieverlust geht das Teilchen vom Zustand 2 in den Zustand 1.

Die Konstanten $A_{2 \rightarrow 1}$, $B_{1 \rightarrow 2}$, $B_{2 \rightarrow 1}$ sind Atomkonstanten, die unabhängig von der Temperatur sind. Im Gegensatz dazu sind die Koeffizienten $a_{2 \rightarrow 1}$, $b_{1 \rightarrow 2}$ Funktionen der Temperatur. Ferner hängen sie ab von der Gesamtzahl der vorhandenen Partikel und deren Arten. Für eine gegebene Zusammensetzung werden sie proportional zur Gesamtdichte sein. Wie ist die Abhängigkeit von der Temperatur, die streng genommen keine Temperatur ist, da wir einen Zustand allgemeinerer Art betrachten, der irgendeiner Art von Strahlung von außen ausgesetzt ist? Es wird jedoch eine bestimmte Verteilung der Geschwindigkeit zwischen den Teilchen sein und von dieser Verteilung nehmen wir an, dass Sie von der Maxwell-Form ist.

⁸**Achtung:** σ wird oft als Formelbuchstabe für ein Fläche benutzt (m^2), hier ist es aber ein Energiefluß (Ws/m^2).

⁹[Milne, 1924, p. 118]. Das gleiche Verhältnis wird auch von [Tolman, 1924] und anderen angegeben.

¹⁰Die Analyse von [Fowler, 1924] (vgl. auch [Eddington, 1926, p. 339]) empfiehlt die vorliegende Behandlung. Die Ergebnisse sind jedoch etwas anders. Eddington nahm ein monochromatisches Strahlungsgleichgewicht an, wobei das kontinuierliche Spektrum zu einer Absorptionslinie zusammengefaßt wurde. Die vorliegende Behandlung wird zeigen, dass diese Annahme nicht gerechtfertigt ist, da das kontinuierliche Spektrum in einem Bereich mit höherer Dichte als die Absorptionslinie produziert wird.

¹¹Im Original steht $a_{1 \rightarrow 2}$, aber diese Richtung wird in der Arbeit nie benutzt und ist auch sinnlos.

In diesem Fall wird die Gruppe die Verteilung im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer bestimmten Temperatur T imitieren, d.h. **die betrachte Gruppe hat die gleiche Geschwindigkeitsverteilung wie ein gleiches Gas, das sich tatsächlich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet**. Dieses T ist im Hinblick auf die betrachtete Gruppe nur ein Parameter, der die Geschwindigkeits-Verteilung beschreibt. Es ist jedoch die »Temperatur« der Gruppe wie sie ein Thermometer messen würde, dessen Thermometerkugel von einer perfekt leitenden Hülle umschlossen wird, wobei die Strahlung durch die perfekt leitende und damit perfekt reflektierende Hülle abgeschirmt wird – es würde einfach die Temperatur infolge der Intensität des molekularen Bombardements gemessen, das die Hülle trifft.

Nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts, sollten – *wenn die Gruppe im thermodynamischen Gleichgewicht ist* – die super-elastischen Kollisionen als Ausgleich genau so viele inelastische Stöße haben. Die Voraussetzung dafür ist, daß

$$n_1 b_{1 \rightarrow 2} = n_2 a_{2 \rightarrow 1} \quad (10)$$

Allerdings haben wir im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T durch die Boltzmann-Beziehung

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{q_2}{q_1} e^{-h\nu/(kT)} \quad (11)$$

Daher haben wir im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T

$$\frac{b_{1 \rightarrow 2}}{a_{2 \rightarrow 1}} = \frac{q_2}{q_1} e^{-h\nu/(kT)} \quad (12)$$

Diese Gleichung muss aber wegen der Geschwindigkeitsverteilung der Partikel bestehen. Obwohl wir diese Gleichung vor allem nur für das thermodynamische Gleichgewicht bewiesen haben, muss sie folglich auch gelten, wann immer auch die Geschwindigkeit-Verteilung durch einen Temperatur-Parameter T beschrieben werden kann. Das Verhältnis $\frac{b_{1 \rightarrow 2}}{a_{2 \rightarrow 1}}$ ist natürlich unabhängig von der Dichte.

Wir nehmen daher Gleichung (12) als allgemeingültig an.

Bezüglich der getrennten Abhängigkeit von der Temperatur von $b_{1 \rightarrow 2}$ und $a_{2 \rightarrow 1}$, ist es aus allgemeinen Gründen klar, daß $b_{1 \rightarrow 2}$ weitgehend von den Partikelzahlen verschiedener Arten abhängen wird, deren kinetische Energie größer als $h\nu$ ist. So wird $b_{1 \rightarrow 2}$ einen Faktor $e^{-h\nu/(kT)}$ enthalten; die anderen Faktoren, also auch $a_{2 \rightarrow 1}$, werden mit der Temperatur viel langsamer variieren (vergl. [Fowler, 1924]).

5 Übertragungsgleichung

Wir betrachten nun die Übertragung der Strahlungsenergie durch das System. Wir nehmen dazu eine dünne Platte, mit der Fläche dS und Dicke ds . Die Zahl der Quanten ν -Strahlung, die in die Platte aus Richtungen eintritt, die innerhalb eines Raumwinkels $d\omega$ senkrecht zur Platten-Normale liegen, ist

$$\frac{I_\nu \Delta\nu d\omega dS}{h\nu}$$

und die Zahl der Quanten, die die Platte in der gleichen Richtung verlassen, ist

$$\frac{(I_\nu + dI_\nu) \Delta\nu d\omega dS}{h\nu}$$

Die Materie im Inneren der Platte muss im stationären Zustand dafür sorgen, daß das Mehr der letzteren Zahl gegenüber der ersteren gleich dem Mehr an (spontanen und induzierten) Emissionen minus Anzahl der entsprechenden Absorptionen von ν -Quanten in den Richtungen von $d\omega$ ist. Die Zahl solcher Emissionen ist

$$n_2 ds dS (A_{2 \rightarrow 1} + B_{2 \rightarrow 1} I_\nu) \frac{d\omega}{4\pi}$$

und die Zahl solcher Absorptionen ist

$$n_1 ds dS B_{1 \rightarrow 2} I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}$$

Daher ist

$$\frac{dI_\nu \Delta\nu}{h\nu ds} = \frac{1}{4\pi} [n_2(A_{2 \rightarrow 1} + B_{2 \rightarrow 1} I_\nu) - n_1 B_{1 \rightarrow 2} I_\nu]$$

Mit Gleichung (5 auf Seite 7), Gleichung (6 auf Seite 8), Gleichung (7 auf Seite 8) und Gleichung (9 auf Seite 8), ergibt sich

$$\frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = -n_1 I_\nu + \frac{q_1}{q_2} n_2 (\sigma + I_\nu) \quad (13)$$

Dies ist die Übertragungsgleichung von Strahlung.

6 Planckgesetz

Ausgehend von den Klammern, werden wir nun überprüfen, ob sich Gleichung (13) zu Gleichung (3 auf Seite 6) reduziert, wenn der Zustand auf das strenge thermodynamischen Gleichgewicht reduziert wird. Die beiden Gleichungen werden identisch sein, wenn vorausgesetzt wird, daß ist

$$\rho k_\nu = \alpha_\nu \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \quad (14)$$

und

$$\rho k_\nu B_\nu = \alpha_\nu \frac{q_1}{q_2} n_2 \sigma \quad (15)$$

Gleichung (14) liefert die Beziehung, die den Masse-Absorptionskoeffizienten für die Gesamtheit der Atome unter Berücksichtigung des Atom-Absorptions-Koeffizienten verbindet. Dividieren wir Gleichung (15) durch Gleichung (14), so erhalten wir

$$B_\nu = \frac{n_2 \frac{q_1}{q_2}}{n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2}} \sigma \quad (16)$$

Aber im thermodynamischen Gleichgewicht gilt Gleichung (11 auf der vorherigen Seite). Setzt man Gleichung (11 auf der vorherigen Seite) in Gleichung (16) ein, so wird erhalten

$$B_\nu = \frac{\sigma}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \quad (17)$$

Das ist genau das Plancksche Gesetz, wie es sein muß. So enthält Gleichung (13 auf der vorherigen Seite) die Gleichung (3 auf Seite 6) als Spezialfall. Wegen unserer Annahmen ist

die Art der Strahlungsübertragung vollständig bekannt, wenn n_1 und n_2 als Funktionen des Ortes bekannt sind.

7 Stationaritätsbedingung

Wir schreiben jetzt die Bedingung auf, dass der Zustand stabil ist. Wir haben einfach zu erklären, dass die Anzahl der Übergänge $1 \rightarrow 2$ gleich der Zahl $2 \rightarrow 1$ ist. Das ergibt

$$n_1 \left[B_{1 \rightarrow 2} \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + b_{1 \rightarrow 2} \right] = n_2 \left[A_{2 \rightarrow 1} + B_{2 \rightarrow 1} \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + a_{2 \rightarrow 1} \right] \quad (18)$$

Wir definieren eine Größe

$$\epsilon = \frac{b_{1 \rightarrow 2}}{B_{1 \rightarrow 2}}$$

und verwenden die Beziehungen Gleichung (5 auf Seite 7), Gleichung (6 auf Seite 8) und Gleichung (12 auf Seite 9). Damit wird aus Gleichung (18)

$$\left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} - n_2 \frac{q_1}{q_2} \sigma + \epsilon \left[n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} e^{h\nu/(kT)} \right] = 0 \quad (19)$$

Aus der bisherigen Herleitung ergibt sich, daß der Koeffizient ϵ proportional zur Gesamtdichte ist und prinzipiell von der Temperatur durch einen Faktor $e^{-h\nu/(kT)}$ abhängt.

8 Übertragungsgleichung bei stationärem Zustand

Gleichung (19) können wir umformen zu¹²

$$\frac{n_2 \frac{q_1}{q_2}}{n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2}} = \frac{\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \epsilon}{\sigma + \epsilon (e^{h\nu/(kT)} - 1)} \quad (20)$$

Mit Gleichung (20) wird aus Gleichung (13 auf der vorherigen Seite)

$$\frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \left[-I_\nu + \frac{\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \epsilon}{1 + \epsilon (e^{h\nu/(kT)} - 1)} \frac{\epsilon}{\sigma} \right] \quad (21)$$

¹²Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \epsilon [n_1] &= n_2 \frac{q_1}{q_2} [\sigma + \epsilon (e^{h\nu/(kT)})] \\ &= n_2 \frac{q_1}{q_2} [\sigma + \epsilon (e^{h\nu/(kT)} + 1 - 1)] \\ \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \epsilon \left[n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right] &= n_2 \frac{q_1}{q_2} [\sigma + \epsilon (e^{h\nu/(kT)} - 1)] \\ \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) \left[\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \epsilon \right] &= n_2 \frac{q_1}{q_2} [\sigma + \epsilon (e^{h\nu/(kT)} - 1)] \end{aligned}$$

Zur weiteren Behandlung wird sowohl eine optische Dicke τ_ν für ν -Strahlung eingeführt, definiert durch

$$\alpha_\nu \left(n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2} \right) ds = d\tau_\nu = k_\nu \rho ds \quad (22)$$

als auch ein relativer Materie-Parameter, definiert durch

$$\eta = \frac{\epsilon}{B_\nu(\tau)} = \epsilon \frac{e^{h\nu/(kT)} - 1}{\sigma} = \frac{b_{1 \rightarrow 2}}{B_{1 \rightarrow 2}} \frac{e^{h\nu/(kT)} - 1}{\sigma} \quad (23)$$

Mit Gleichung (21 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (22) wird aus Gleichung (21 auf der vorherigen Seite)

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{\int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \eta B_\nu(\tau)}{1 + \eta} \quad (24)$$

Dies ist die Form durch die Übertragungsgleichung, wenn die Existenz eines stationären Zustandes angenommen ist.

9 Der Weg ins Sterninnere

Wir haben gesehen, dass näherungsweise gilt $\epsilon \propto \rho e^{-h\nu/(kT)}$. Daher wird nach Gleichung (23), außer bei sehr tiefen Temperaturen, η etwa unabhängig von der Temperatur aber proportional zur Gesamtdichte. Wenn wir daher Gleichung (24) auf einen Stern anwenden, sehen wir dass η am Sternrand Null ist und in Richtung zum Sterninneren steigt.

Für $\eta \rightarrow 0$ tendiert Gleichung (24) zur Form

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} \quad (25)$$

Dies ist identisch mit Gleichung (4 auf Seite 7), der Transfergleichung für monochromatische Gleichgewichtsstrahlung.

Für $\eta \rightarrow \infty$ tendiert Gleichung (24) zur Form

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(\tau) \quad (26)$$

Dies ist identisch mit Gleichung (3 auf Seite 6), die Übertragungsgleichung beim lokalen thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T . Wir erinnern uns, daß in Gleichung (24) T einfach ein Temperatur-Parameter zur Beschreibung der Geschwindigkeits-Verteilung ist.

Wir folgern aus dem Vorstehenden, dass beim Eindringen in einen Stern von außen zuerst ein monochromatisches Strahlungsgleichgewicht herrscht, das nach innen kontinuierlich in lokale thermodynamische Gleichgewichte übergeht. Je höher die Dichte, das heißt, je mehr die Atome durch andere Atome bombardiert werden, um so mehr Atome emittieren nach dem Kirchhoffschen Gesetz.

10 Absorption und Streuung

Der Gleichung (24 auf der vorherigen Seite) kann noch eine andere Deutung gegeben werden. Nach Schuster nehmen wir an, dass das Material einen Absorptionskoeffizienten k_ν und einen Streukoeffizienten s_ν besitzt. Damit ist die Übertragungsgleichung

$$\frac{dI_\nu}{\rho ds} = -(k_\nu + s_\nu)I_\nu + s_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + k_\nu B_\nu \quad (27)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (24 auf der vorherigen Seite) wenn wir setzen

$$\eta = \frac{k_\nu}{s_\nu} \quad d\tau_\nu = (k_\nu + s_\nu)\rho ds \quad (28)$$

So ist unser Ergebnis gleichbedeutend mit der Aussage, dass in der Nähe des Randes des Sterns die Streuung ohne Änderung der Frequenz dominiert, aber um so weiter wir in den Stern eindringen, um so mehr begegnen wir Regionen, in denen die absorbierte Strahlung zwar wieder emittiert wird – aber in Frequenzen je nach der örtlichen Temperatur, d.h. entsprechend der lokalen Geschwindigkeits-Verteilung.

11 Zahlenbeispiel

Es besteht ein Interesse an einer groben numerischen Berechnung der Größe η . Um deren Größenordnung zu sehen, beschränken wir uns darauf elektronische Kollisionen zu betrachten.

N_e sei die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit, m die Masse des Elektrons. In einer Maxwell-Verteilung bei der Temperatur T ist die Anzahl der bewegten Elektronen mit einer Geschwindigkeit zwischen c und $c + dc$ mit Richtung in $d\omega$

$$N_e \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}mv^2/(kT)} v^2 dv d\omega$$

Daraus ergibt sich die Zahl der Kollisionen mit Geschwindigkeiten größer als v_0 mit einer stationären Kugel vom Radius r in der Zeit dt

$$4\pi N_e \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \pi r^2 dt \int_{v_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}mv^2/(kT)} v^3 dv$$

Setzen wir $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu$, wird diese Zahl zu

$$N_e r^2 \left(\frac{8\pi kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h\nu}{kT} \right) e^{-h\nu/(kT)} dt$$

Von allen Kollisionen möge ein Bruchteil f Atome im Zustand 1 in den angeregten Zustand 2 bringen. Dann haben wir

$$b_{1 \rightarrow 2} = f N_e r^2 \left(\frac{8\pi kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h\nu}{kT} \right) e^{-h\nu/(kT)} dt$$

Für $B_{1 \rightarrow 2}$ dürfen wir nach [Unsöld, 1927, S. 804] folgenden Wert annehmen

$$B_{1 \rightarrow 2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\pi e^2}{m h \nu}$$

wobei e die Ladung des Elektrons ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme des theoretischen Wertes für die mittlere Lebensdauer des angeregten Atoms.

Mit beiden vorstehenden Gleichungen wird aus Gleichung (23 auf Seite 12)

$$\eta = f N_e r^2 \left(\frac{8\pi kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h\nu}{kT} \right) (1 - e^{-h\nu/(kT)}) \quad (29)$$

Wir sehen, dass sich η im Einklang mit der allgemeinen Argumentation oben nur langsam mit T ändert und proportional zur Elektronendichte ist.

Ausgehend von dieser Formel wollen wir den partiellen Elektronendruck $P_e = N_e kT$ finden, wenn $\eta = 1$ ist.

Wir finden

$$(P_e)_{\eta=1} = \frac{8\pi\nu^2 e^2}{mc^3} \cdot \frac{1}{fr^2} \left(\frac{mkT}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{h\nu}{kT} \right)^{-1} (1 - e^{-h\nu/(kT)})^{-1} \quad (30)$$

Der Wert von f für *Ionisierungs*-Kollisionen wurde von [Fowler, 1924] untersucht. Es zeigte sich, dass die effektive Zielfläche der Querschnitt des Atoms ist. Nehmen wir an, etwas von der gleichen Art gilt auch für anregende Kollisionen und betrage hinsichtlich der Größenordnung $f = 1$, $r = 1.5 \times 10^{-8}$ cm. Wir werden weiter $T = 6000^\circ\text{C}$ annehmen und für ν die mittlere Frequenz der H und K Linien von Ca+. Mit $e = 4.774 \times 10^{-4}$ E.S.U¹³, $m = 9.00 \times 10^{-28}$ Gramm¹⁴, $h = 6.55 \times 10^{-27}$ ergs¹⁵ finden wir

$$(P_e)_{\eta=1} = 1.46 \times 10^3 \text{ dyn cm}^{-2} = 1.46 \times 10^{-3} \text{ atm}$$

Da P_e in der Umkehrschicht eines Sterns in der Größenordnung von 10^{-4} atm ist, dürfte aus dieser groben Berechnung folgen, dass in der Umkehrschicht eines Sterns η etwa $\frac{1}{10}$ ist. Da wir die Auswirkungen von anderen Kollisionen als elektronischen Kollisionen vernachlässigt haben, wird η eher höher als dieses $\frac{1}{10}$. Wenn wir aber einen Wert in der Größenordnung $\eta = \frac{1}{10}$ ansetzen für die Umkehrschicht eines Sterns, so würde daraus folgen, dass sich die Umkehrschicht in einem Gebiet mit deutlich monochromatischem Strahlungsgleichgewicht befindet. In den Photosphäre-Schichten sollte der Übergang vom monochromatischen Strahlungsgleichgewicht zum lokalen thermodynamischen Gleichgewicht bei $P_e = 10^{-2}$ atm sein, wenn wir nach innen gehen. Das bedeutet $\eta = 10$, was praktisch mit dem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht korrespondiert.

12 Größere Gültigkeit

Gleichung (24 auf Seite 12) wurde mit einer speziellen Annahmen zu den betrachteten Atomen abgeleitet, nämlich der, dass nur zwei stationäre Zustände existieren. Ein Unterschied entsteht, wenn zyklische Prozesse vom Typ $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ auftreten, und hat als Ergebnis, dass die Strahlung in der Frequenz gewandelt wird. Auf der anderen Seite, suggeriert die Parallelität von Gleichung (24 auf Seite 12) mit der Schuster Form Gleichung (27 auf der vorherigen Seite), dass Gleichung (24 auf Seite 12) eine größere Gültigkeit hat als

¹³Die Einheit E.S.U. wurde nicht gefunden (es könnte sein $1 \text{ E.S.U} = 10^{-6} \text{ esu}$), in alten Einheiten könnte die Elementarladung $4.774 \times 10^{-10} \text{ esu}$ (electrostatic unit of charge) sein und hat folgende Beziehung mit der SI-Ladungseinheit Coulomb oder As: $1 \text{ esu} = \frac{\text{As}}{10c_0} \approx 3.335 \times 10^{-10} \text{ As}$. Daraus folgt $4.774 \times 10^{-10} \text{ esu} = 1.5924 \times 10^{-19} \text{ As}$ modern $1.6021 \times 10^{-19} \text{ As}$.

¹⁴modern $9.091 \times 10^{-31} \text{ kg}$

¹⁵modern $6.626 \times 10^{-34} \text{ Ws}^2$

die Art der Ableitung angibt, sie enthält in der Tat keinen ausdrücklichen Verweis auf die stationären Zustände des Atoms, außer im Parameter η .

13 Möglicher η -Verlauf

Wenn wir annehmen, dass Gleichung (24 auf Seite 12) für alle Frequenzen allgemeingültig ist, haben wir möglicherweise eine Gleichung, aus denen wir die entstehende Intensität für das gesamte Spektrum ableiten können – sowohl innerhalb der Absorptionslinien als auch zwischen ihnen, wenn wir wissen, wie T und η als Funktionen der optische Tiefe verlaufen. [Schuster, 1905] berühmte Untersuchung entspricht in der Tat dem Ansatz eines bestimmten Gradienten für T und $\eta = \textit{konstant}$. Wenn unsere Argumente richtig sind, kann dies keine gute Darstellung der wahren Sachlage abgeben, da wir gesehen haben, daß η nach innen von Null zu einer sehr großen Zahl steigt. Leider scheint es derzeit nicht möglich zu sein, mit Gleichung (24 auf Seite 12) die Fortschritte mit Hilfe eines variablen η zu machen, sagen wir $\eta \propto \rho$. Was ich aber in zwei neueren Arbeiten versucht habe, ist die Annahme einer bestimmten Ebene mit $\eta = 0$ auf einer Seite und $\eta = \infty$ auf der anderen Seite. Dies kann im besten Fall nur eine grobe Darstellung sein, aber es ist eine Lösung zu erwarten, die einige der Merkmale der wahren Lösung zeigen dürfte.

Nach der oben beschriebenen groben numerischen Schätzung beginnt das monochromatische Strahlungsgleichgewicht bei $P_e = 10^{-3}$ atm, wenn wir nach außen die Photosphäre passieren. In den beiden letzten Arbeiten habe ich eine Abgrenzung zwischen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ angenommen und das berücksichtigt als Teilung zwischen der Chromosphäre und oberen Umkehrschicht und der unteren Umkehrschicht und Photosphäre. Ich stelle nun fest, dass ich diese Teilung zu hoch annahm, bei einem zu niedrigen Druck und deshalb kann eine Revision von [Milne, 1927, Überarbeitung p. 706] erforderlich sein. Selektiver Strahlungsdruck kann in spürbar größeren Tiefen in der Umkehrschicht wirken als ich geschätzt hatte.

14 Fraunhofer Linien

Es sollte erwähnt werden, dass, wie wir uns in diesem Papier auf die Emission und Absorption von Strahlung durch Übergänge zwischen stationären Zuständen beschränkt haben, die Analyse bezieht sich nur auf die Atome, die den Kern der Absorptionslinie produzieren. Der Einfluss auf die Frage von Flügeln und Linienbreiten wurde nicht untersucht. Wir haben einfach gezeigt, dass beim Druck der Umkehrschicht und niedrigeren Drücken, Kollisionen das monochromatische Strahlungsgleichgewicht nicht stören, während die Kollisionen bei Drücken der Photosphäre eine Umverteilung der Intensität einer gegebenen Frequenz verursachen, wodurch sich dem Kirchhoffschen Gesetz genähert wird. Bei der Diskussion zur Bildung einer Fraunhofer-Linie, sind wir verpflichtet beide Regionen zu berücksichtigen. Die Schicht der Photosphäre selbst spielt eine Teilrolle in der »Umkehrung« der Linie. Zum Beispiel muss irgendein Calcium in den Schichten, in denen ein spürbares kontinuierliches Spektrum anfängt, beginnen eine Absorptionslinie zu formen, da sein Absorptionskoeffizient höher ist als der allgemeine Absorptionskoeffizient. Oberhalb der Schicht der Photosphäre sinkt der allgemeine Absorptionskoeffizient auf Null und die Gasschichten sind transparent außer den Linienfrequenzen – deswegen sind hier die Linien vertieft.

15 Linienformen

Wenn vorstehende Vorschläge in irgendeiner Weise der Wirklichkeit entsprechen, haben sie einen allgemeinen Einfluss auf die theoretische Berechnung der Profile der Intensitätskurven der Absorptionslinien. Dr. [Minnaert, 1927, p. 618] vergleicht in seiner jüngsten wichtigen Arbeit über die Profile der Absorptions-Kurven im Fraunhofer-Spektrum der Sonne seine Ergebnisse mit Berechnungen auf Basis der Formel

$$I_\nu = \int_0^\infty \epsilon_n u e^{-k_\nu \tau} k_\nu d\tau$$

Diese Formel gilt allgemein, wenn ϵ_ν den Emissions-Koeffizienten der ν -Strahlung bezeichnet. Aber wir sind nur in den Regionen berechtigt $\epsilon_\nu = B_\nu$ (Planck-Funktion) zu setzen, in denen ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. Außerhalb dieser Schichten ist ϵ_ν nicht mehr durch B_ν gegeben. In der Mitte der Linie ist es gegeben durch

$$\epsilon_\nu = \frac{n_2 \frac{q_1}{q_2}}{n_1 - n_2 \frac{q_1}{q_2}} \sigma$$

für den Fall eines Atoms mit nur zwei stationären Zuständen; n_2/n_1 kann in der äußeren Schicht viel niedrigeren Temperaturen »entsprechen« als von der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für die *integrierte* Strahlung vorhergesagt wird und so kann ϵ_ν sehr unterschiedlich von $B_\nu(T)$ sein. Die Flügel der Linien erfordern andere Überlegungen, wie sie von [Stewart, 1924, p. 35] und [Unsöld, 1927] + [Unsöld, 1928] gebracht werden.

16 Streuquerschnitt

Die Schätzung $P_e = 10^{-3}$ atm für die Schicht, in der wahrscheinlich $\eta = 1$ ist, überschätzt, wie bereits erwähnt, den Druck. In diesem Zusammenhang ist daran zu erinnern, dass der Kollisions-Radius eines Atoms für eine Anregung durch ähnliche Atome sehr viel größer ist als der Radius, der aus der kinetischen Theorie der Gase berechnet wird. Zum Beispiel ist für die Linienverbreiterung für Quecksilber-Atome durch [Orthmann und Pringsheim, 1928] gefunden worden, dass der Anregungs-Querschnitt etwa dem 100-fachen des gas-kinetischen Querschnitts entspricht. Andererseits liefert die Linien-Abschwächung (Abregung der angeregten Atome) einen Querschnitt, der nur etwa dem 10-fachen des gas-kinetischen Querschnitts entspricht. Es ist möglich, dass die Schätzung $P_{e(\eta=1)} = 10^{-3}$ atm auf 10^{-4} atm oder 10^{-5} atm reduziert werden sollte.

17 Schlußfolgerungen

Abschließend sei erwähnt, dass der Übergang vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht zum monochromen Strahlungsgleichgewicht einen bedeutenden Einfluss auf das Verhältnis der Restintensität zwischen dem Zentrum und dem Rand einer Linie hat. Bei einem strengen monochromatischen Gleichgewicht, sollte die zentrale Restintensität auf den Faktor $2/5$ zwischen Zentrum und Rand verringert werden. Dagegen sollte bei Gültigkeit des lokalen thermodynamischen Gleichgewicht bis zum Sternenrand, wie das Schwarzschild ausgeführt hat, die Linie in dem kontinuierlichen Hintergrund verblassen. Die Tatsache, dass die Linien

nicht am Sternenrand verschwinden, zeigt, dass ein gewisses Maß an monochromen Gleichgewicht für alle Linien gilt, wie es von der Theorie vorhergesagt wird. Das ist einfach die von Schwarzschild abgeleitete selektive Streuung.

Möglicherweise könnte ein besseres Modell einer stellaren Atmosphäre durch Fitten von drei auf einander folgenden Schichten konstruiert werden, nämlich mit Schichten für $\eta = 0$, $\eta = 1$ und $\eta = \infty$ – entsprechend der zunehmenden Tiefe.

18 Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis (am Ende jeder Ref. stehen die Seitenzahlen hier)

[Eddington 1926] EDDINGTON, Arthur S.: *The internal constitution of the stars [Der innere Zustand der Sterne]*. University Press, Cambridge, 1926. – viii, 407 S. – URL <http://nla.gov.au/nla.cat-vn2495749>. – ISBN 978-0521337083 8

[Einstein 1916 bzw. 1917] EINSTEIN, Albert: Zur Quantentheorie der Strahlung. In: *Physikalische Zeitung bzw. Physikalische Gesellschaft Zürich - Mitteilungen* 18 (1916 bzw. 1917), S. 47 – 62 bzw. 121 – 129 5

[Fowler 1924] FOWLER, Ralph H.: On Statistical Equilibrium and the Mechanism of Ionisation by Electronic Impacts [Über das statistische Gleichgewicht und den Mechanismus der Ionisation durch elektronische Einwirkungen]. In: *Philosophical Magazine; 6. Serie* 47 (1924), Nr. 278, S. 257 – 277. – URL <http://www.informaworld.com/smpp/content~db=all~content=a910335785~frm=abslink> 8, 9, 14

[Gold 1909] GOLD, E.: Atmosphere, isothermal layer of the, and atmospheric radiation. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 69 (1909), jun, S. 653 – 658

[Milne 1924] MILNE, Edward A.: The equilibrium of the calcium chromosphere [Das Gleichgewicht der Kalzium-Chromosphäre]. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 85 (1924), dec, S. 111 – 142. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1924MNRAS...85..111M> 8

[Milne 1927] MILNE, Edward A.: Selective radiation-pressure and the structure of a stellar atmosphere [Selektiver Strahlungsdruck und die Struktur einer Sternatmosphäre]. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 87 (1927), jun, S. 697–708. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1927MNRAS...87..697M> 6, 15

[Milne 1928a] MILNE, Edward A.: The effect of collisions on monochromatic radiative equilibrium [Die Wirkung von Kollisionen auf das monochromatische Strahlungsgleichgewicht]. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 88 (1928), Apr, S. 493 – 502. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1928MNRAS...88..493M> 2

- [Milne 1928b] MILNE, Edward A.: Pressures in the calcium chromosphere and reversing layer [Drücke in der Kalzium-Chromosphäre und die Umkehrschicht]. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 88 (1928), Jan, S. 188 – 202. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1928MNRAS...88..188M> 6
- [Minnaert 1927] MINNAERT, Marcel Gilles J.: Die Intensität innerhalb Fraunhoferscher Linien. In: *Zeitschrift für Physik* 45 (1927), Sep, S. 610 – 619. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ZPhy...45..610M> 16
- [Orthmann und Pringsheim 1928] ORTHMANN, W. ; PRINGSHEIM, Peter: Über die Verbreiterung und Schwächung der Hg-Resonanzlinie bei Erhöhung des Quecksilberdampfdrucks. In: *Zeitschrift für Physik* 46 (1928), Mar, S. 160 – 167. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1928ZPhy...46..160O> 16
- [Schumacher 2000?] SCHUMACHER, Horst: *SONNENGLOBUS*. 2000?. – URL <http://www.spaceglobe.de/Mond1/Mond2/Mond3/Mond4/Mond5/sun1.html>. – access 29.11.2010 3
- [Schuster 1905] SCHUSTER, Arthur: Radiation Through a Foggy Atmosphere [Strahlung durch eine trübe Atmosphäre]. In: *The Astrophysical Journal* 21 (1905), jan, S. 1 – 22. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1905ApJ....21....1S> 3, 15
- [Stewart 1924] STEWART, John Q.: The Width of Absorption Lines in a Rarefied Gas [Die Breite der Absorptionslinien in einem verdünnten Gas]. In: *The Astrophysical Journal* 59 (1924), jan, S. 30 – 36. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1924ApJ....59...30S> 16
- [Tolman 1924] TOLMAN, Richard C.: Duration of Molecules in Upper Quantum States [Die Verweildauer der Moleküle im oberen Quantenzustand]. In: *Phys. Rev.* 23 (1924), Jun, Nr. 6, S. 693 – 709. – URL http://prola.aps.org/abstract/PR/v23/i6/p693_1 8
- [Unsöld 1927] UNSÖLD, Albrecht: Über die Struktur der Fraunhoferschen Linien und die Dynamik der Sonnenchromosphäre. In: *Zeitschrift für Physik* 44 (1927), Nov, S. 793–809. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ZPhy...44..793U> 13, 16
- [Unsöld 1928] UNSÖLD, Albrecht: Über die Struktur der Fraunhofersehen Linien und die quantitative Spektralanalyse der Sonnenatmosphäre. In: *Zeitschrift für Physik* 46 (1928), Nov, S. 765–781. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1928ZPhy...46..765U> 16