Stefan und die Gegenstrahlung

Dipl.-Physiker Jochen Ebel

30. Juni 2008

1 Vorwort

Über die Eigenschaften und Wirkungen Strahlung bestehen bei Einigen noch Unklarheiten - u.a. auch deshalb, weil moderne Arbeiten zur Strahlung als teilweise unglaubwürdig eingestuft werden.

Deswegen ist es vielleicht hilfreich, das Paper Stefans [1] zu kennen.

2 Auszüge aus Stefans Originalarbeit

Zunächst einige Bemerkungen zu den Grundlagen von Stefans Paper. Nach seinem Text hat Stefan selbst zwar Messungen gemacht, aber seine Messergebnisse nicht angegeben. Seine Schlußfolgerungen zieht er aus den Ergebnissen der Experimente vieler anderer. Die ausgewerteten Versuche wurden 1817 (Dulong und Petit [3]) und später publiziert - aber eben alle vor 1879. Den Versuchsaufbau von Dulong und Petit zeigt Bild 1, S. 2.

Alle Versuchsergebnisse zur Strahlungsmessung sind unvermeidbar durch Effekte der Wärmeleitung teilweise verfälscht. Diese Störungen müssen herausgerechnet werden, damit die Strahlungsdaten unverfälscht gewonnen werden können. In der Zeit zwischen Dulong und Stefan hatte sich weiteres Wissen über Wärmeleitung angehäuft. Deswegen hat Stefan die früheren Versuchsergebnisse mit den neueren Erkenntnissen korrigiert. Zu Stefans Zeiten wurden zwei Wärmeleitungsvorgänge klar unterschieden: die Wärmeleitung durch Konvektion eines strömenden Gases und die Wärmeleitung durch ein ruhendes Gas. Dulong hatte nach dem Kenntnisstand 1817 die Meßergebnisse nur entsprechend dem vermuteten Strömungseinfluß korrigiert. Für ein ruhendes Gas nimmt Stefan die Wärmeleitung als druckunabhängig an.

> **Anmerkung 1:** Heute wissen wir, daß die Wärmeleitung eines ruhenden Gases nur so lange druckunabhängig ist, wie die freie Weglänge der Gasteilchen klein gegen die Abmessungen der Versuchsanordnung ist. Wird die freie Weglänge groß gegen die Abmessungen der Versuchsanordnung wird die Wärmeleitung druckabhängig. Derartig gute Vakua waren damals nicht (?) herstellbar und waren mit Sicherheit bei den Wärmetransportmessungen nicht verwendet worden.

Nach Durchführung der Wärmeleitungskorrekturen fand Stefan, daß jeder Strahlungstransport durch folgende Gleichung (in moderner Schreibweise: ε Absorptionskoeffizient, σ Stefan-Boltzmann-Konstante) beschrieben werden kann (siehe Faksimile 2, S. 3 von Seite 414):

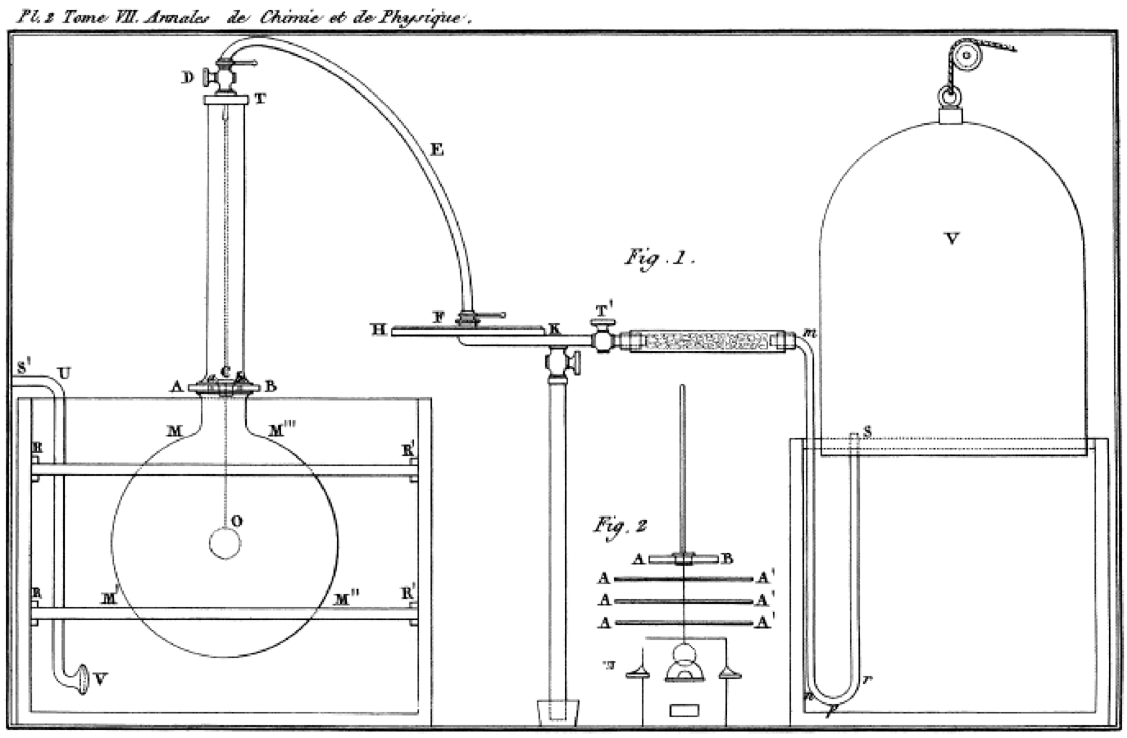

Bild 1: Dulongs Versuchsaufbau - Links ist die eigentliche Meßanodnung mit einer warmen Kugel in der Mitte (Temperatur T_1) und der Umhüllung mit einer einheitlichen Temperatur T_2. Der rechte Teil dient der Evakuierung.

$$N = \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{1}$$

Für das heutige N verwendet Stefan die Bezeichnung W und für die Temperatur sowohl die Formelbuchstaben u als auch T. Da damals Wärmeleistungen nicht so einfach wie heute bestimmbar waren, verwendet Stefan nicht die Wärmeleistung direkt, sondern die Abkühlgeschwindigkeit w, dem Quotienten aus Wärmeabfluß N und dem Wärmekapazität der Kugel, da bei vergleichbaren Kugeln auch der Wärmeinhalt gleich ist (siehe Faksimile 3, S. 3 von Seite 397):

$$w = \frac{N}{\text{Wärmekapazität}} \tag{2}$$

Die Wärmekapazität ergibt sich aus dem Produkt von Masse (von Stefan als »Gewicht« bezeichnet) und spezifischer Wärme.

> **Anmerkung 2:** Damals standen noch keine Möglichkeiten für eine direkte Wärmestrommessung zur Verfügung. Deswegen bezieht sich Stefan immer auf instationäre Messungen, bei denen Wärmestrom als proportional zur zeitlichen Temperaturänderung angenommen wird. Bei einer modernen Durchführung der Experimente würde man stationär arbeiten, d.h. die innere Kugel z.B. elektrisch heizen. Dabei kann heute die Heizleistung genau gemessen werden.

Allgemein betrachtet Stefan eine Wärmegröße $f(u)$, die er in seiner Arbeit später als $f(u) = T^4$ für Strahlung spezifiziert.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit für die nackte Thermometerkugel ist durch

$$w_1 = \frac{3A}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

jene für die versilberte durch

$$w_1' = \frac{3A'}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

gegeben. Setzt man für den Quotienten

Bild 2: Auszug aus Stefans Arbeit [1, S. 414]

Bedeutet u_1 die Temperatur des Thermometers zur Zeit t, $-du_1$ die Änderung von u_1 in der Zeit dt, so entspricht dieser die Wärmemenge $-pcdu_1$ oder $pcv_1 dt$, wenn mit p das Gewicht, mit c die specifische Wärme des Thermometers bezeichnet und die Abkühlungsgeschwindigkeit $-\frac{du_1}{dt} = v_1$ gesetzt wird.

Bild 3: Auszug aus Stefans Arbeit [1, S. 397]

Ganz allgemein kann nach Stefan (auf Seite 400 - Faksimile 4, S. 4) jeder Wärmestrom als Differenz zweier Wärmeströme beschrieben werden, wobei jeder der beiden Teilwärmeströme als unabhängig von der zweiten Temperatur angenommen wird. Der Wärmestrom vom kühleren zum wärmeren Körper wird heute meistens als Gegenstrahlung bezeichnet, weil seine Ausbreitungsrichtung dem Gesamtwärmestrom entgegen gesetzt gerichtet ist.

Für Stefan ist die Aufteilung in zwei Wärmeströme nur eine nützliche Aufteilung für die mathematische Behandlung der Probleme bei der Wärmeübertragung. An irgendwelche Realitäten scheint er dabei noch nicht gedacht zu haben.

Wichtig für die weitere Behandlung der Probleme ist auch die Tatsache, daß bei den verwendeten langen Beobachtungszeiten die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit keine Rolle gespielt hat.

Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit spielt eine wichtige Rolle für den Nachweis, daß die Aufteilung in zwei Wärmeströme physikalische Realität ist. Aus Stefans Arbeit (siehe Faksimile 5, S. 4 von Seite 411) geht klar hervor, daß Stefan überhaupt keinen Zweifel hatte, daß ein Wärmestrom von der kühleren Umgebung zur wärmeren Kugel physikalische Realität ist und von der wärmeren Kugel absorbiert wird[1] - allerdings hielt es Stefan damals für unmöglich, die beiden Wärmeströme getrennt zu messen, weshalb er die absoluten Größen der beiden Wärmeströme als »hypothetisch« bezeichnet.

Anmerkung 3: Heute kann man sich mit dem Photonenbild eine gewisse Vorstel-

1) Wir betrachten heute z.B. schwarze Löcher als physikalische Realität - und können diese prinzipiell nicht sehen.

Wichtiger ist es, zu bemerken, dass W als Differenz zweier von u_1 und u_2 abhängiger Grössen erscheint, und dass man für W immer einen Ausdruck von der Form

$$W = f(u_1) - f(u_2)$$

erhält, welcher Art auch die Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der Temperatur sein mag. Man kann also auch den durch die Leitung der Luft bedingten Wärmeverlust der inneren Kugel betrachten als das Resultat von zwei Wärmeströmen, von denen der eine von der Kugel zur äusseren Hülle, der zweite in umgekehrter Richtung vor sich geht, jeder unabhängig von dem anderen. Es verhält sich also der Wärmeaustausch durch Leitung analog jenem, welcher zwischen verschieden warmen Körpern durch Strahlung vermittelt wird. Die von Dulong und Petit

Bild 4: Auszug aus Stefans Arbeit [1, S. 400]

lung von der realen Existenz der beiden Wärmeströme machen, wenngleich mit Messungen als Temperaturänderungen immer nur die Differenz beider Wärmeströme gemessen werden kann. Wenn allerdings einer der beiden Wärmeströme als bekannt vorausgesetzt werden darf, folgt aus der Differenz automatisch die gesuchte Größe. Dieses Meßprinzip ist in der Meßtechnik weit verbreitet und in der Regel in der Datenverarbeitungseinheit der Meßgeräte integriert. Den Nutzer eines Meßgeräts interessiert es in der Regel nicht, was genau im Meßgerät passiert.

Die absolute Grösse der von einem Körper ausgestrahlten Wärmemenge kann durch Versuche nicht bestimmt werden. Versuche können nur den Überschuss der von dem Körper ausgestrahlten über die von ihm gleichzeitig absorbirte Wärmemenge geben, welch' letztere von der ihm aus der Umgebung zugestrahlten Wärme abhängig ist. Hat man jedoch eine Formel für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrahlung aufgestellt, so lässt sich mit Hilfe derselben auch ein Werth für die absolute Grösse der ausgestrahlten Wärme ableiten, doch hat ein solcher nur eine hypothetische Bedeutung.

Bild 5: Auszug aus Stefans Arbeit [1, S. 411]

3 Die Endlichkeit der Signalausbreitung

Wir betrachten eine Versuchsanordnung ähnlich der von Dulong verwendeten (Bild 1, S. 2) mit einer warmen Kugel im Zentrum einer sehr großen äußeren Hülle. Die äußere Hülle soll nicht auf einer konstanten Temperatur gehalten werden, sondern von einem Wärmedämmmaterial umgeben sein, dessen andere Seite auf einer konstanten Temperatur T_3 gehalten wird - also schematisch die Anordnung nach Bild 6, S. 5.

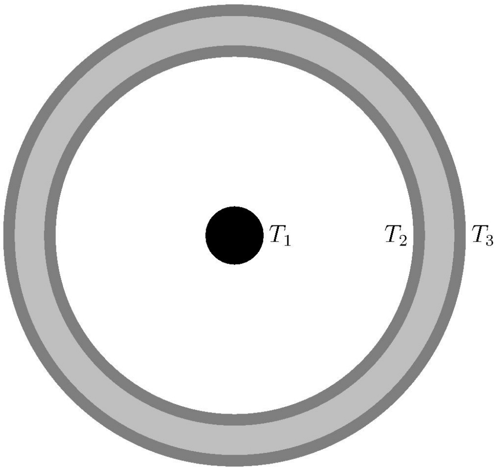

Bild 6: Dulongs Versuchsaufbau - schematisch und modifiziert

Im stationären Zustand sind die Zusammenhänge einfach (die Wirkung der Wärmedämmung wird mit einer Konstante k beschrieben, alle Oberflächen sollen ideal schwarz sein ($\varepsilon = 1$) und das Vakuum so gut, das Wärmeleitung zwischen T_1 und T_2 keine Rolle spielt. Damit muß durch alle Schichten der gleiche Wärmestrom fließen[2)]:

$$N = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = k(T_2 - T_3) \tag{3}$$

Da die Leistung vorgegeben werden soll, ist Gleichung (3) ausgehend von dem gegebenen T_3 auflösbar nach T_1:

$$T_2 = T_3 + \frac{N}{k} \qquad \text{und} \qquad T_1^4 = T_2^4 + \frac{N}{\sigma}$$
$$\text{oder} \tag{4}$$
$$T_1 = \sqrt[4]{T_2^4 + \frac{N}{\sigma}}$$

Wenn die Heizleistung N geändert wird, ändern sich T_1 und T_2. Im stationären Zustand sind T_1 und T_2 wieder mit Gleichung (4) zu bestimmen.

Aber wie ist der Zeitverlauf der Temperaturen zwischen den stationären Werten? - siehe Bild 7, S. 6.

Wie der genaue Zeitverlauf ist hängt natürlich vom Versuchsaufbau ab, seinen Massen usw. Idealisiert nehmen wir an, daß der Abstand zwischen der Kugel in der Mitte und der Hülle sehr groß ist, so daß die Strahlung von der Mittenkugel bis zur Umhüllung eine Laufzeit

2) Würde nicht durch alle Schichten der gleiche Wärmestrom fließen, müßte die Differenz der Wärmeströme als Energie gespeichert werden, was zu einer laufenden Temperaturänderung führt - das aber widerspricht der vorausgesetzten Stationarität.

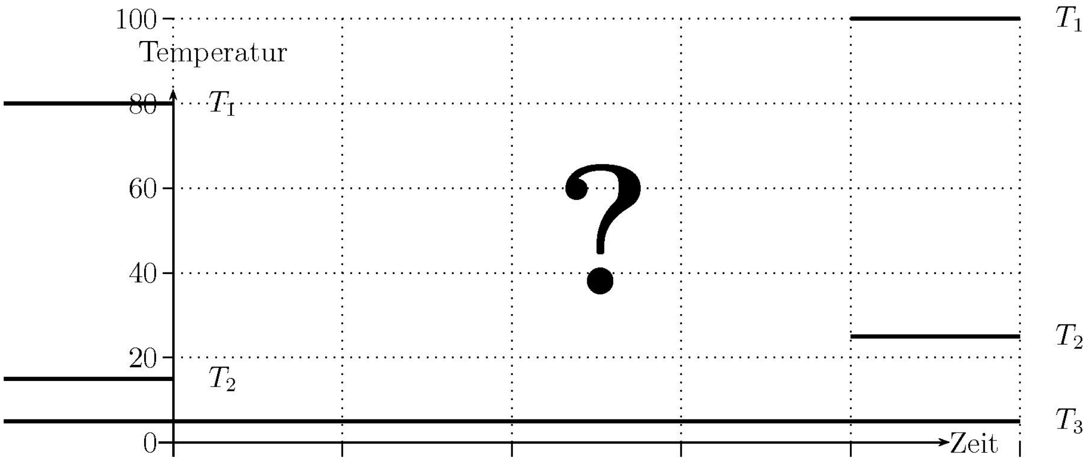

Bild 7: Wie ist der Temperaturverlauf, wenn zum Zeitnullpunkt die Heizleistung plötzlich erhöht wird?

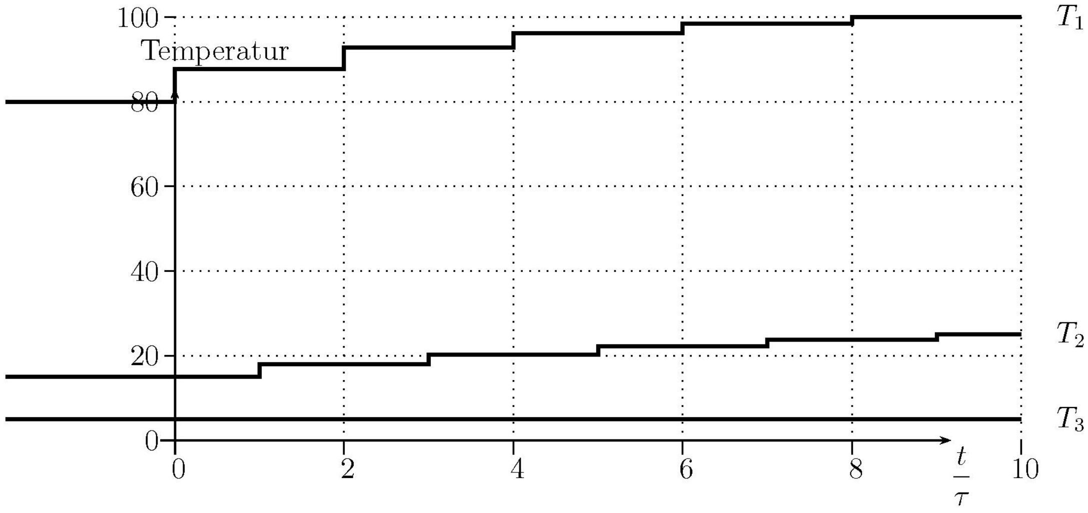

Bild 8: Temperaturverlauf, wenn zum Zeitnullpunkt die Heizleistung plötzlich erhöht wird und die Wärmeausbreitung eine Laufzeit τ hat.

τ braucht und die Auswirkung einer Leistungsänderung kurz gegenüber der Laufzeit ist (idealisiert also eine Sprungfunktion).

Das Ergebnis ist der Temperaturverlauf nach Diagramm 8, S. 6. Warum ist das so? Nach der Relativitätstheorie kann ein Signal – gleich welcher Art – sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Zum Zeitpunkt der erhöhten Leistungsabgabe der Kugel kann also die Umhüllung noch gar nichts von der Erhöhung der Ausstrahlungsleistung »wissen« (unabhängig von der Art der Strahlungsausbreitung) und behält seine ursprüngliche Temperatur und die Kugel im Zentrum kann noch gar nicht »wissen«, daß sich die Temperatur der Umhüllung ändern wird und strahlt die erhöhte Leistung so lange entsprechend der alten Temperatur der Umhüllung ab, bis die Information von der Umhüllung eintrifft, daß die Temperatur gestiegen ist. Um die erhöhte Leistung aber bei einer wärmeren Umhüllung abzustrahlen, ist eine Temperaturerhöhung notwendig. Das geht immer hin und her, bis sich endlich der neue stationäre Wert eingestellt hat (dargestellt ist das »Ping-Pong« nur viermal).

Mit dem Konzept der Gegenstrahlung ist die Erklärung auch ohne Relativitätstheorie ganz einfach: Entsprechend der höheren Heizleistung erhöht sich die Temperatur der Kugel in der Mitte bei konstanter Gegenstrahlung. Wenn die erhöhte Heizleistung auf der Umhüllung eintrifft (nach der Laufzeit τ), erhöht sich die Temperatur der Umhüllung und dementsprechend wird mehr Gegenstrahlung emittiert. Nach einer weiteren Laufzeit τ trifft die Gegenstrahlung auf der Zentrumskugel ein und wird absorbiert. Die absorbierte Leistung muß auch wieder emittiert werden und dadurch erhöht sich die Temperatur der Zentrumskugel – usw. die Temperaturen schaukeln sich gegenseitig hoch bzw. die steigende Gegenstrahlung (infolge der höheren Temperatur) der kühleren Umhüllung erhöht die Temperatur der warmen Zentrumskugel.

4 Das Pyrgeometer

Das Pyrgeometer dient dazu, die Gegenstrahlung zu messen. Zur Erklärung der Funktionsweise des Pyrgeometers wird die Anordnung nach Bild 6, S. 5 etwas erweitert, indem eine schwarze Folie (Pyrgeometerfolie) um die Zentralkugel angeordnet wird (siehe Bild 9, S. 7).

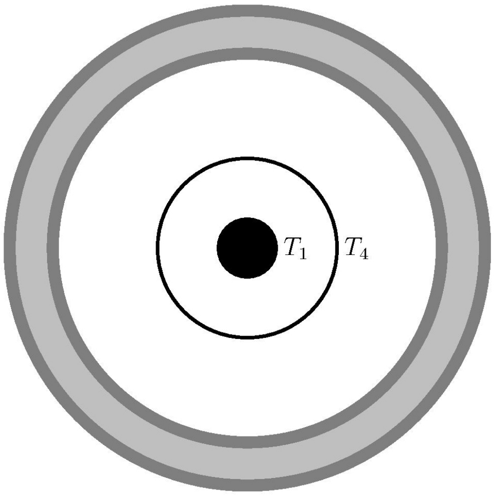

Bild 9: Versuchsaufbau nach Bild 6, S. 5 mit Pyrgeometerfolie ergänzt.

Bekannt sind nur die Temperaturen T_1 und T_4. Gesucht ist die Gegenstrahlung N_G, die von der Umhüllung ausgeht. Entsprechend Gleichung (3), S. 5 ist der Nettowärmestrom zwischen der Zentralkugel und der Pyrgeometerfolie:

$$N = \sigma(T_1^4 - T_4^4) = \sigma T_1^4 - \sigma T_4^4 \tag{5}$$

Im stationären Zustand muß dieser Nettowärmestrom an die Umhüllung weitergegeben werden:

$$N = \sigma T_4^4 - N_G \tag{6}$$

Aus den beiden Gleichungen (5) und (6) folgt eindeutig der Wert der Gegenstrahlung:

$$\begin{aligned} \sigma T_1^4 - \sigma T_4^4 &= \sigma T_4^4 - N_G \\ N_G &= \sigma(2T_4^4 - T_1^4) \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Gleichung ist die grundlegende Pyrgeometergleichung. In einem technischen Meßgerät sind wie bei jedem technischen Gerät die idealen Bedingungen immer mehr oder weniger gut erfüllt (z.B. kein idealer Absorptionsfaktor) - die Abweichungen werden durch Kalibrierung minimiert. Dabei ist real immer die Nettostrahlung gemessen, der Wert der Gegenstrahlung ergibt sich aus der Rechnung, da die Stefangleichung als gültig vorausgesetzt wird. An der Gültigkeit der Stefan-Gleichung (1), S. 2 zweifelt aber heute keiner mehr.

5 Die Entropie

Einige behaupten, die Gegenstrahlung würde gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verstoßen - vernachlässigen dabei aber unzulässigerweise, daß es keine Gegenstrahlung gibt ohne die stärkere Strahlung zu dem Körper, der die Gegenstrahlung emittiert. Die Maxwellschen Gleichungen, die die Ausbreitung beschreiben, haben als Lösung richtungsumkehrbare Lösungen, d.h. ein Körper der Gegenstrahlung aussendet, die irgendwo absorbiert wird, erhält von dem Absorber unvermeidbar auf dem gleichen Wege in umgekehrter Richtung ebenfalls Strahlung. Da die Temperatur des Absorbers der Gegenstrahlung definitionsgemäß höher ist als die Temperatur des Emitters der Gegenstrahlung ist auch die Strahlungsintensität höher. Damit ist bei jedem beliebigen Subsystem immer erfüllt, daß der Wärmestrom vom wärmeren zum kälteren Körper geht - und damit ist immer der zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt.

Besonders amüsant ist, daß Boltzmann [2] feststellt, daß sich Stefans Gesetz erst aus der Erfüllung des zweiten Hauptsatzes ergibt – Faksimile 10, S. 8.

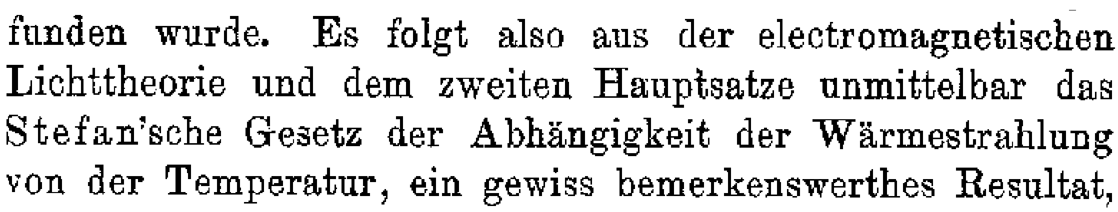
funden wurde. Es folgt also aus der electromagnetischen Lichttheorie und dem zweiten Hauptsatze unmittelbar das Stefan'sche Gesetz der Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, ein gewiss bemerkenswerthes Resultat,

Bild 10: Auszug aus Boltzmann Arbeit [2, S. 293]

6 Absorptionslänge

Aus der Umkehrbarkeit der Strahlungsausbreitung folgt auch noch etwas bei der Absorption in einem teiltransparenten Medium (z. B. einer Atmosphäre mit Treibhausgasen), daß aus dem gleichen Bereich in dem die Originalstrahlung absorbiert wird, auch die Gegenstrahlung kommt. Aus einem Bereich des teiltransparenten Medium, der praktisch nicht von der Originalstrahlung erreicht wird, kommt auch keine Gegenstrahlung zum Emitter der Originalstrahlung.

Für die die Intensität des Restes I_R der Originalintensität I_0 nach Absorption in einem teiltransparenten Medium gilt in der Regel ein exponentieller Abfall:

$$I_R = I_0 \exp\left(-\frac{x}{L_A}\right) \tag{8}$$

Wie schnell die Intensität sinkt, wird durch die Größe L_A bestimmt, die als Absorptionslänge bezeichnet wird. Nach der Absorptionslänge ist die Anfangsintensität auf einen

Bruchteil 1/e (≈ 0.37) abgefallen. Ist die durchlaufene optische Länge ein Mehrfaches der Absorptionslänge, ist die Originalstrahlung praktisch vollständig absorbiert - oft als Sättigung bezeichnet.

Wenn das absorbierende Medium einen Temperaturgradienten hat, wird die Tatsache bedeutungsvoll, daß die anteilige Verteilung der Herkunft der Gegenstrahlung aus verschiedenen Bereichen so ist, wie der Restwert der Originalstrahlung – oder mit anderen Worten die Stärke der Gegenstrahlung bestimmt sich aus einer mittleren Temperatur über der Absorptionslänge.

Wenn die Absorptionslänge so gering ist, daß der Temperaturabfall über der Absorptionslänge fast Null ist, dann hat eine Verkürzung der Absorptionslänge praktisch keinen Einfluß auf die Stärke der Gegenstrahlung. Wenn aber über der Absorptionslänge die Temperatur merklich abnimmt, dann bedeutet eine Verkürzung der Absorptionslänge daß kaum noch Strahlungsanteile aus Bereichen kommen, wo die Anfangstemperatur sehr deutlich abgenommen hat, d.h. die mittlere Temperatur der Bereiche, deren Emission den Absorber der Gegenstrahlung erreicht, ist gestiegen.

Mit anderen Worten: Die Intensität der Gegenstrahlung steigt, wenn die Absorptionslänge kürzer wird – sofern die Absorptionslänge nicht schon so kurz ist, daß über der Absorptionslänge der Temperaturabfall vernachlässigbar ist. Oder wenn die Absorptionslänge ein Vielfaches der optischen Weglänge ist, dann wird kaum absorbiert und kaum emittiert und die Stärke der Gegenstrahlung nimmt zwar relativ zu - bleibt aber vernachlässigbar.

Literatur

[1] Stefan, J.: Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften* 79 (1879), S. 391 – 428. – Faksimile auf http://www.ing-buero-ebel.de/strahlung/Original/Stefan1879.pdf

[2] Boltzmann, L.: Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie. In: *Annalen der Physik und Chemie* 22 (1884), S. 291 – 294. – Faksimile auf http://www.ing-buero-ebel.de/strahlung/Original/Boltzmann1884.pdf

[3] Dulong, MM. ; Petit: Des Recherches sur la Mesure des Temperatures et sur les Lois de la communication de la chaleur. In: *Annales de Chimie et de Physique* (1817), S. 225 – 265, 337 – 368