

# Vereinfachungen zum Treibhauseffekt

Dipl.-Physiker Jochen Ebel

1. April 2011

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Anlaß</b>	<b>1</b>
<b>2 Was geht alles in die Berechnung des Treibhauseffekts ein?</b>	<b>2</b>
<b>3 Hauptteil</b>	<b>2</b>
3.1 Vorbemerkung . . . . .	2
3.2 Druckkoordinaten . . . . .	4
3.3 Lösung der STG ohne Konvektion . . . . .	5
3.4 Tropopause . . . . .	8
3.5 Blog-Diskussion I . . . . .	9
3.6 Blog-Diskussion II . . . . .	10
3.7 Verlauf mit Konvektion . . . . .	13
<b>4 Tropopause</b>	<b>16</b>
<b>5 Ozonschicht</b>	<b>17</b>
<b>6 Winkelabhängigkeit</b>	<b>21</b>
<b>7 Breitenabhängigkeit</b>	<b>22</b>
<b>8 Verzeichnisse</b>	<b>23</b>
Abbildungsverzeichnis . . . . .	23
Tabellenverzeichnis . . . . .	23
Literaturverzeichniss . . . . .	23

## 1 Anlaß

Der Treibhauseffekt beruht auf der Wirkung strahlungsaktiver Gase (Treibhausgase) in der Atmosphäre. Die Erklärungen zum Treibhauseffekt sind oft so, daß für viele Leser der Eindruck entsteht, die Klimawissenschaft sei ein Gebäude, das auf wackligen Füßen steht und deswegen wird diese so geheimnisvoll in die Öffentlichkeit gebracht, daß das nicht nachvollziehbar ist und evtl. sogar auf Täuschung beruht. Deswegen würde immer auf Modelle verwiesen, die kaum jemand kontrollieren könnte.

Als Folge der Diskussion in einem Blog entstand die Idee unter Inkaufnahme der Mängel, die bei wesentlicher Vereinfachung entstehen, die wesentlichen Beziehungen zum Treibhauseffekt darzustellen.

## 2 Was geht alles in die Berechnung des Treibhauseffekts ein?

1. natürlich die Absorptionsfähigkeit der Treibhausgase, die auch deren Emissionsfähigkeit bestimmt
2. die Wellenlängenabhängigkeit der Absorptionsfähigkeit
3. die Konzentration der Treibhausgase und deren Änderung
4. die Temperaturabhängigkeit der Größen
5. die Winkelverteilung der Strahlung
6. die Temperaturverteilung in der Atmosphäre
7. die Konvektion
8. die Feuchtigkeitsverteilung in der Atmosphäre
9. die Wolkenverteilung
10. das Speichervermögen der Ozeane
11. die vielen Arten der Oberflächenbedeckung
12. das Oberflächenrelief
13. die Staub- (Ärosol-)Verteilung
14. und noch vieles mehr

Hier wird nur vereinfacht die Absorptionsfähigkeit und die Konvektion betrachtet - aber alle Ergebnisse liefern die prinzipiellen Werte des Treibhauseffektes, wenn sich auch die Zahlenwerte infolge der groben Vereinfachungen von den exakten Rechenergebnissen unterscheiden.

## 3 Hauptteil

### 3.1 Vorbemerkung

Das wichtigste Hilfsmittel zum Verstehen der Treibhausvorgänge ist die Strahlungsübertragungsgleichung (auch Strahlungstransportgleichung STG genannt). Zum Verständnis der STG eine Vorbemerkung, die keine Gebrauchsanweisung ist, sondern eine Rekapitulation des Wissens ist, das bei der STG gebraucht wird, die aber vielleicht doch für Manche Neues enthält.

Als erstes eine Einführung in eine Beziehung, die zwar einfach ist, aber leider auf Manche abschreckend wirkt, obwohl (fast) jeder damit schon zu tun hatte.

Die Geschwindigkeit  $v$  eines Autos ist der Bruch aus zurückgelegter Wegstrecke  $s$  von  $s_1$  nach  $s_2$  in der Zeit  $t$  von  $t_1$  bis  $t_2$ :

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

Einen Bruch bezeichnet der Mathematiker als Quotient und die zurückgelegte Wegstrecke ist der Entfernungsabstand (auch Entfernungsdifferenz genannt) zwischen den beiden Orten  $s_1$  und  $s_2$ . Analoges gilt für die Zeitdifferenzen. Deswegen

wird der Bruch Gleichung (1 auf der vorherigen Seite) als Differenzenquotient bezeichnet.

Als Schreibvereinfachung<sup>1</sup> für die Differenzen wird geschrieben  $s_2 - s_1 \Rightarrow ds$  und  $t_2 - t_1 \Rightarrow dt$ , also

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2)$$

wobei  $ds$  und das dazugehörige  $dt$  beliebig klein sein können. Der Mathematiker spricht dann nicht mehr vom Differenzenquotienten sondern vom Differentialquotienten.

Die Differentialrechnung wird einige Male verwendet. Leser, denen die Differentialrechnung Schwierigkeiten bereitet, können diese Teile überlesen – sollten dann aber die Ergebnisse akzeptieren, um dem Gedankenfluß weiter verfolgen zu können.

Eine zweite Vorbemerkung betrifft die Strahlungsübertragungsgleichung

Die Strahlungsübertragungsgleichung beschreibt die Änderung der Intensität  $I$  eines Wärmestrahls beim Durchgang durch ein absorbierendes Gas mit der Temperatur  $T$ . Bei isothermen Verhältnissen ist die Intensität jedes Strahles gleich  $B(T)$ . Dieses  $B(T)$  ist die Planckintensität, deren Formel Planck 1900 gefunden hatte. Bei einer Abweichung der Intensität  $I$  von der Planckintensität  $B(T)$  wird beim Durchgang durch ein absorbierendes (und damit auch emittierendes) Gas diese Abweichung längs des Weges  $s$  verkleinert. Wie schnell diese Verkleinerung der Abweichung geschieht, ist eine Gaseigenschaft und diese Gaseigenschaft wird mit der Absorptionskonstante  $\kappa_s(s)$  beschrieben. Dabei kann sich die Größe  $\kappa_s(s)$  auch längs des Weges verändern.

Damit lautet die Strahlungsübertragungsgleichung

$$\kappa_s(s) * \frac{dI}{ds} = - [I - B(T)] \quad (3)$$

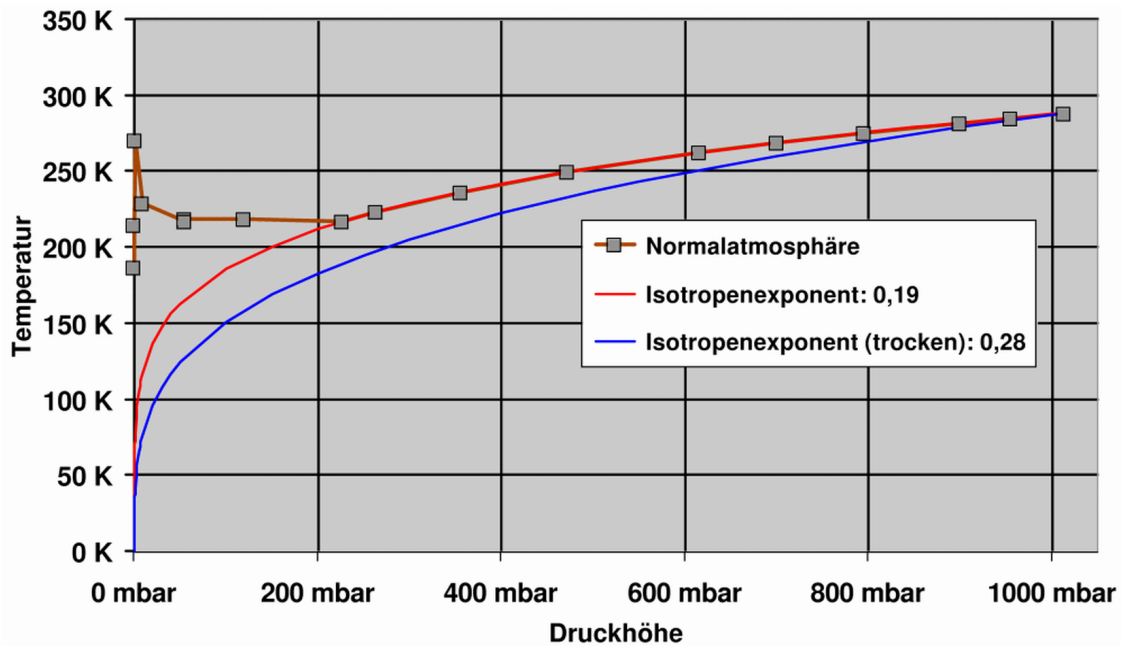
Dies Tatsache der Verringerung der Abweichung nannte auch [Schack, 1972], den einige Klimaleugner gern zitieren und ihm dabei Inhalte unterstellen, die er nicht gesagt hat. Mit Beharrungszustand ist eine einheitliche Temperatur für alles gemeint, denn andernfalls beständen ja schon von Anfang an Temperaturdifferenzen, die sich auch verringern würden – also wäre es kein Beharrungszustand. Zitat:

Die Absorption der ein Gas durchsetzenden Wärmestrahlung ist im Beharrungszustand genau gleich der Wärmestrahlung dieses Gases. Denn wenn hierbei Abweichungen beständen, würden sich in einem dies Gas erfüllenden Hohlraum von selbst Temperaturdifferenzen bilden, was nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht möglich ist.

Bei der Atmosphäre interessiert der Intensitätsverlauf als Funktion der Höhe direkt oder einer anderen aussagefähigen höhenabhängiger Größe.

---

<sup>1</sup>Die Mathematiker mögen mir diese vereinfachte Erklärung verzeihen.



Diagr. 1: Temperatur als Funktion der Druckhöhe

### 3.2 Druckkoordinaten

Für die Erklärung des Treibhauseffektes ist die Verwendung der Druckordinate  $p$  zweckmäßig. Zwischen einer Höhe  $h$  und dem Druck  $p$  in dieser Höhe besteht ein eindeutiger Zusammenhang. Die Verwendung des Drucks ist zweckmäßig, weil die Treibhauswirkung von der Zahl der Treibhausmoleküle abhängt und bei gleichen Druckdifferenzen sind auch die Zahlen der Moleküle gleich, weil die Druckdifferenz durch das Gewicht der Moleküle entsteht. Entsprechend ändert sich das Aussehen des Temperaturverlaufs in der Atmosphäre, wenn man den Temperaturverlauf nicht als Funktion der geometrischen Höhe, sondern als Funktion des Drucks darstellt - siehe Diagramm 1.

Die entsprechende Gleichung für die Beziehung zwischen Druck  $p$  und Höhe  $h$  ist ( $\rho$ : Luftdichte,  $g$ : Erdbeschleunigung):

$$\frac{dp}{dh} = -\rho \cdot g \quad (4)$$

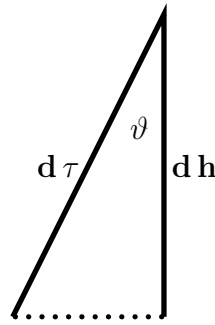
Die Strahlungsübertragungsgleichung gilt natürlich auch für Strahlen, die schräg unter einem Winkel  $\vartheta$  zur Vertikalen durch die Atmosphäre gehen. Bei gleicher Höhendifferenz ist die Weglänge des Strahls größer als die Höhendifferenz. Diese Abhängigkeit wird durch eine (nachfolgend nicht weiter gebrauchte) Winkelfunktion, den  $\cos \vartheta$  ausgedrückt. Siehe Bild 2 auf der nächsten Seite.

Die Absorptionslänge  $\kappa_s(s)$  muß bei Druckkoordinaten durch einen äquivalenten Druck  $\kappa_p(s) \Rightarrow \kappa_p(p)$  ausgedrückt werden.

Damit wird die Strahlungsübertragungsgleichung in Druckkoordinaten (und hier noch ohne Vereinfachungen):

$$\kappa_p * \cos \vartheta * \frac{dI}{dp} = -[I - B(T)] \quad (5)$$

Der STG sieht man nicht sofort an, daß die STG implizit eine Gleichung zur Bestimmung von  $T$  ist. Aber die linke Seite von Gleichung (5) ist die in der Schicht mit der Dicke  $dp$



Diagr. 2: Größere Schrägentfernung als Höhendifferenz bei schrägen Strahlen

absorbierte Leistung. Die Summe (genauer das Integral) über alle Winkel und Wellenlängen ergibt die insgesamt dieser Schicht zugeführte Wärme. Da im unteren Teil keine Wärme zugeführt wird, muß diese Wärmemenge Null sein – und das ist nur bei bestimmten  $T$  erfüllt. Aber dieses Null trifft nicht immer zu: In der Ozonschicht wird durch die Absorption von UV-Strahlung Ozon gebildet, das beim Zerfall Wärme freisetzt. In der Troposphäre unterliegt  $T$  einer Zwangsbedingung: dem Temperaturgradienten, bei dessen Überschreitung Konvektion einsetzt. Gleichzeitig wird durch diese Konvektion die Wärme herangeführt, damit konvektive Wärmeänderung plus Strahlungswärmeänderung in jeder Schicht  $dp$  Null ergeben.

### 3.3 Lösung der STG ohne Konvektion

Die Gleichung (5 auf der vorherigen Seite) sieht sehr einfach aus, erfordert aber wegen vieler Winkel, vieler Wellenlängen (da  $\kappa_p$  wellenlängenabhängig ist) usw. einen erheblichen Rechenaufwand.

Da es hier nur um das Prinzip geht, werden Vereinfachungen benutzt:

- von der Gesamtheit der Wellenlängen wird Folgendes angenommen: Absorption erfolgt nur in einem bestimmten Wellenlängenbereich
- und in diesem Wellenlängenbereich ist  $\kappa_p$  konstant und unabhängig von Druck
- von der Gesamtheit der Winkel werden nur zwei Strahlen betrachtet: einer in Richtung runter  $I_r$  und einer in Richtung hoch  $I_h$ .

Der  $\cos \vartheta$  ist im ersten Fall (abwärts)  $= +1$ , denn die Abweichung wird bei zunehmenden Druck verkleinert. Im zweiten Fall (aufwärts) ist der  $\cos \vartheta = -1$ , denn die Abweichung wird bei abnehmenden Druck verkleinert. Damit entstehen zwei Gleichungen:

$$+ \kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = - [I_r - B(T)] \quad \text{und} \quad - \kappa_p * \frac{dI_h}{dp} = - [I_h - B(T)] \quad (6)$$

Die nach oben durch Strahlung transportierte Wärme (Nettostrahlung) habe die Größe  $W$  und sei zunächst konstant (das bedeutet kein konvektiver Wärmetransport = ruhende Luft). Diese nach oben transportierte Wärme (Nettostrahlung) ist die Differenz zwischen Aufwärts- und Abwärtsstrahlung:

$$W = I_h - I_r \quad \Rightarrow \quad I_h = W + I_r \quad (7)$$

Die Gleichung (7) wird in Gleichung (6) eingesetzt und es ergibt sich:

$$- \kappa_p * \frac{dW}{dp} - \kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = - [W + I_r - B(T)] \quad (8)$$

Berücksichtigt man, daß  $W$  unabhängig von  $p$  ist, so ist  $dW/dp = 0$ . Damit vereinfacht sich Gleichung (8 auf der vorherigen Seite) zu

$$-\kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = -[W + I_r - B(T)] \quad (9)$$

Nun liefert eine einfache Subtraktion der Gleichung (9) von der Gleichung (6 auf der vorherigen Seite) eine noch einfachere Gleichung, weil sich viele Glieder aufheben:

$$2 * \kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = W \quad (10)$$

Die Lösung von Gleichung (10) lautet:

$$I_r = \frac{W * p}{2 * \kappa_p} \quad (11)$$

Diese Lösung erfüllt auch die sogenannte Randbedingung, denn am oberen Rand bei dem Druck  $p = 0$  beginnt die Abwärtsstrahlung und das ist die aus dem Weltraum kommende Strahlung. Diese Strahlung ist fast 0.

Die Lösung Gleichung (11) kann nun in Gleichung (6 auf der vorherigen Seite) eingesetzt werden:

$$+ \kappa_p * \frac{d \frac{W * p}{2 * \kappa_p}}{dp} = - \left[ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - B(T) \right] \quad (12)$$

Nach Ausrechnen des Differentialquotienten ergibt sich:

$$\frac{W}{2} = - \left[ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - B(T) \right] \quad (13)$$

In Gleichung (13) sind zwei Größen festgelegt ( $W$  und  $\kappa_p$ ), so daß Gleichung (13) eine Bestimmungsgleichung für  $B(T)$  ist. Das Umstellen liefert deshalb:

$$B(T) = \left[ 1 + \frac{p}{\kappa_p} \right] * \frac{W}{2} \quad (14)$$

Wenn  $B(T)$  festliegt, folgt daraus für einen bestimmten Wellenlängenbereich entsprechend der Planckfunktion eine bestimmte Temperatur  $T$ . Obwohl die Zunahme von  $B(T)$  bei den Vereinfachungen linear mit dem Druck  $p$  erfolgt hat  $T$  keine lineare Druckabhängigkeit, da der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $B(T)$  zwar monoton, aber nichtlinear ist (bei ganz breiten Wellenlängenbereich ist diese Abhängigkeit  $\sim T^4$ , bei schmalen Bereich eine e-Funktion). Trotzdem ist eine Aussage möglich: da  $B(T)$  nach unten zunimmt, nimmt auch die Temperatur nach unten zu. Bestimmt wird die Temperatur an dem TOA ( $p = 0$ ) durch  $W/2$ . Für Drücke unterhalb der Absorptionslänge (bzw. unterhalb dem entsprechendem Absorptionsdruck  $\kappa_p$ ) ist die Temperaturzunahme gering, weil  $p/\kappa_p$  klein gegenüber dem ersten Glied in der Klammer (der 1) ist. Bei weiterer Druckzunahme erfolgt eine schnelle Zunahme der Temperatur, so daß der Temperaturkoeffizient  $dT/dh$  bzw.  $dT/dp$  schnell den adiabatischen Grenzwert ( $\sim 6.5 \text{ K/km}$  überschreitet und in der freien Atmosphäre die Luft nicht mehr ruhig bleibt (d.h. eine Zirkulation setzt ein), d.h. die Annahme eines konstanten  $W$  für alle Drücke ist nicht mehr erfüllt (wegen des konvektiven Wärmetransports - siehe Abschnitt 3.7 auf Seite 13).

Am Boden (beim Druck  $p_0$ ) trifft dann entsprechend Gleichung (11 auf der vorherigen Seite) bei ruhender Luft folgende Gegenstrahlung  $G = I_r$  ein:

$$G = \frac{W * p_0}{2 * \kappa_p} \quad (15)$$

Die gesamte absorbierte Wärme  $A$  an der Oberfläche ist die Summe aus Solarstrahlung  $S$  und Gegenstrahlung  $G$  (Bilanz an der Erdoberfläche):

$$A = S + G \quad (16)$$

Von dieser Gesamtstrahlung wird ein Anteil  $\alpha$  direkt ins Weltall abgestrahlt (außerhalb des absorbierenden Bereiches soll ja keine Absorption stattfinden) und die Summe von Bodenabstrahlung und Stratosphärenabstrahlung soll ja wieder  $S$  sein, damit die Bilanz am TOA stimmt:

$$A * \alpha + W = S \quad (17)$$

Beim Einsetzen von Gleichung (16) wird daraus:

$$[S + G] * \alpha + W = S \quad (18)$$

Mit dem Einsetzen von Gleichung (15) wird daraus:

$$\left[ S + \frac{W * p_0}{2 * \kappa_p} \right] * \alpha + W = S \quad (19)$$

Nach Umstellung wird daraus:

$$W * \left[ \frac{\alpha * p_0}{2 * \kappa_p} + 1 \right] = S * (1 - \alpha) \quad \Rightarrow \quad W = S * \frac{1 - \alpha}{\left[ \frac{\alpha * p_0}{2 * \kappa_p} + 1 \right]} \quad (20)$$

Mit Gleichung (15) und Gleichung (20) wird aus Gleichung (16):

$$A = S + W * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} = S + S * \frac{1 - \alpha}{\left[ 1 + \frac{\alpha * p_0}{2 * \kappa_p} \right]} * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} \quad (21)$$

oder umgestellt:

$$A = S * \left[ 1 + \frac{1 - \alpha}{1 + \frac{\alpha * p_0}{2 * \kappa_p}} * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} \right] = S * \left[ 1 + \frac{1 - \alpha}{\frac{2 * \kappa_p}{p_0} + \alpha} \right] \quad (22)$$

Im Grenzfall sehr kurzer Absorptionslängen ( $\kappa_p$  fast 0 = sehr hohe Treibhausgaskonzentrationen) geht Gleichung (22) in einen Grenzwert über:

$$A = \frac{S}{\alpha} \quad (23)$$

Damit wird nach dieser Rechnung der Grenzwert  $T_k$  für sehr kleine Absorptionslängen unabhängig von der Konvektion und hängt bei dem angenommenen Absorptions-(Transmissions-)Profil nur von der Absorptionsbreite ab.

Wegen  $A = \sigma T^4$  ergibt sich die Temperatur zu

$$T_k = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\alpha}} \quad \text{mit} \quad T_0 = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}} \quad (24)$$

Um so kleiner das durchlässige Fenster ist (d.h. um so kleiner  $\alpha$  ist), um so stärker ist die Gesamteinstrahlung (wegen anwachsender Gegenstrahlung) auf die Oberfläche und damit die Oberflächentemperatur. Was dieses einfache Modell als wesentliche Ergebnisse liefert

- höhere Temperatur der Erdoberfläche mit Treibhausgasen
- Konzentrationsabhängigkeit dieser Temperatursteigerung
- oben ein Bereich mit geringem Temperaturgradienten (Stratosphäre)

ergibt sich auch bei komplizierterer Rechnung.

### 3.4 Tropopause

Im Absatz nach Gleichung (14 auf Seite 6) ist schon erwähnt, daß die Luftschichtung nicht mehr ruhig bleibt, wenn der Betrag des Temperaturgradienten einen bestimmten Grenzwert. Im Abschnitt 4 auf Seite 16 ist dieser Grenzwert berechnet zu [Gleichung (57 auf Seite 17)]:

$$\frac{dT(p)}{dp} < 0.0514 \frac{\text{K}}{\text{mbar}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{p} \right)^{0,81} \quad (25)$$

In Gleichung (14 auf Seite 6) ist aber nur die Planck'sche Quellfunktion bestimmt. Deswegen wird zunächst  $B(T)$  nach  $p$  differenziert und die Kettenregel der Differentialrechnung angewandt:

$$\frac{dB(T)}{dp} = \frac{dB(T)}{dT} * \frac{dT}{dp} = \frac{d \left[ \left( 1 + \frac{p}{\kappa_p} \right) * \frac{W}{2} \right]}{dp} = \frac{W}{2 * \kappa_p} \quad (26)$$

Umgestellt nach  $dT/dp$  wird:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{W}{2 * \kappa_p * \frac{dB(T)}{dT}} \quad (27)$$

Gleichung (27) wird mit  $B(T)$  erweitert und Gleichung (14 auf Seite 6) teilweise eingesetzt:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{W}{2 * \kappa_p * B(T)} * \frac{B(T)}{\frac{dB(T)}{dT}} = \frac{W}{2 * \kappa_p * \left[ 1 + \frac{p}{\kappa_p} \right] * \frac{W}{2}} * \frac{B(T)}{\frac{dB(T)}{dT}} = \frac{1}{\kappa_p + p} * \frac{B(T)}{\frac{dB(T)}{dT}} \quad (28)$$

Der letzte Bruch hängt von der Lage des Absorptionsbandes ab. Der Wert ist  $T/(4 \dots 7)^2$ ,

2

$$\text{Wenn } B(T) = \sigma * T^4 \quad \text{dann ist} \quad \frac{\frac{dB(T)}{dT}}{B(T)} = \frac{4}{T}$$

Ist  $B(T)$  die Planckfunktion

$$B(T) = \frac{K}{\exp\left(\frac{T_\lambda}{T}\right) - 1} \quad \text{dann ist} \quad \frac{\frac{dB(T)}{dT}}{B(T)} = \frac{1}{T} * \frac{\frac{T_\lambda}{T}}{1 - \exp\left(-\frac{T_\lambda}{T}\right)}$$

Der letzte Bruch ist im IR-Bereich bei den Tropopausentemperaturen  $> 4$  und  $< 7$ .



gewählt wird  $T/5$ . Damit wird:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\kappa_p + p} * \frac{T}{5} \quad (29)$$

An der Tropopause wird dieser Grenzwert gerade erreicht. Damit wird der Tropopausendruck  $p_T$ :

$$0.0514 \frac{\text{K}}{\text{mbar}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{p_T} \right)^{0,81} = \frac{1}{\kappa_p + p_T} * \frac{T_T}{5} \quad (30)$$

Werden  $p_T$  und  $T_T$  vorgegeben, so ist Gleichung (30) eine Bestimmungsgleichung für die Absorptionskonstante  $\kappa_p$ . Vorgegeben werden  $p_T = 200 \text{ mbar}$  und  $T_T = 220 \text{ K}$ . Damit wird:

$$0.0514 \frac{\text{K}}{\text{mbar}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{200 \text{ mbar}} \right)^{0,81} = \frac{1}{\kappa_p + 200 \text{ mbar}} * \frac{220 \text{ K}}{5} \quad \Rightarrow \quad \kappa_p = 30 \text{ mbar} \quad (31)$$

### 3.5 Blog-Diskussion I

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Die Verdoppelung der Konzentration mit Halbierung der Absorptionslänge macht die Atmosphäre optisch dichter, wobei die Abwärtsemission auf einer kürzeren Weglänge absorbiert wird. Das gleiche gilt für die Aufwärtsemission, die auch kürzere Absorptionslängen durch die Verdoppelung der Konzentration aufweist.

Vergleicht man beide Richtungen, müsste ein Nullsummenspiel herauskommen, d.h. die Verdoppelung der Konzentration bringt keine Erwärmung und auch keine Abkühlung.

Z.B. Bodenstrahlung, die vor der Verdoppelung in 100 m absorbiert wurde, wird nach Verdoppelung auf 50 m absorbiert, wobei dieses »Trapping« eigentlich zur Erwärmung führen sollte. Es wird aber nicht wärmer, da Abwärtsstrahlung, die bisher in 100 m absorbiert wurde, auch auf 50 m absorbiert wird.

Mit der vorstehenden Herleitung ist gezeigt, daß das nicht zutrifft. Um so kürzer die Absorptionslänge (entsprechend die Druckkonstante  $\kappa_p$ ) um so schneller ist das Ende der Stratosphäre erreicht.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Fazit: Je kürzer die Absorptionslänge, desto schneller werden irgendwelche Erwärmungseffekte thermodynamisch ausgeglichen

Das ist in der Troposphäre richtig, deshalb habe ich ja auch auf den angenähert konstanten Temperaturgradienten in der Troposphäre aufmerksam gemacht. In der Stratosphäre findet aber praktisch keine Konvektion mehr statt, weil der Temperaturgradient dort so niedrig ist. Und deswegen ändert sich auch die Höhe der Tropopause, wenn der Gradient in den unteren Bereichen der Stratosphäre so stark ansteigt, daß »irgendwelche Erwärmungseffekte thermodynamisch ausgeglichen« werden - denn dann sind wir in der Troposphäre.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Das Gegenteil ist doch richtig; du gehst von einem TE aus und ich nicht, weil sich kein TE bilden kann, da Erwärmungseffekte durch Strahlung, schon im Ansatz thermodynamisch so ausgeglichen werden, dass sich kein TE entwickelt.

Unzutreffend - ich gehe von der Gültigkeit der Strahlungsübertragungsgleichung aus. Und die liefert automatisch den Treibhauseffekt.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Sei mal so lieb und erkläre mal genauer, wie ausgerechnet deine Stratosphäre unten am Boden Erwärmungseffekte erzeugt.

Nicht die Stratosphäre erzeugt Erwärmungseffekte, sondern die Solareinstrahlung. Um aber die Größe der Temperaturerhöhung bei Erhöhung der CO<sub>2</sub>-Konzentration zu erhalten, ist wegen des konstanten Temperaturgradienten in der Tropopause (wegen der Konvektion) die Höhe der Tropopause wichtig. Ohne das Einsetzen der Vertikalzirkulation wäre bei ruhender Luft die Oberflächentemperatur noch höher.

### 3.6 Blog-Diskussion II

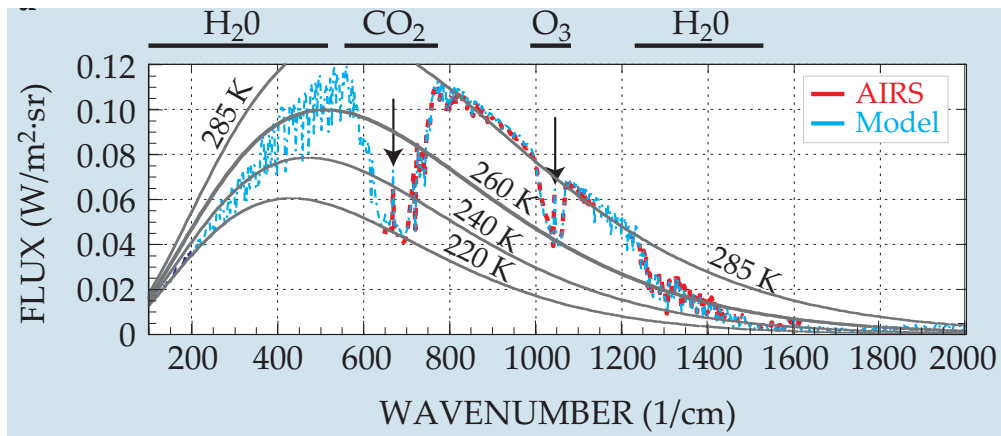
Die an dem TOA abgestrahlte Wärme ist die Summe von konvektiv und strahlungsmäßig in die Atmosphäre eingetragene Wärme. Damit ist in Gleichung (11 auf Seite 6) die Wärme  $W$  nicht mehr druckunabhängig, sondern ist kleiner in geringeren Höhen (größerer Druck) (bzw. umgekehrt), da ja die Summe von konvektiver Wärme und  $W$  konstant bleibt und sich deshalb wegen der Umwandlung von konvektiver Wärme in Strahlungswärme bis zur Tropopause  $W$  erhöht. Geringeres  $W$  bedeutet aber geringeres  $I_r$  und damit geringeres  $B(T)$  [vergleiche Gleichung (14 auf Seite 6)], d.h. ohne Konvektion ist die Oberflächentemperatur höher.

Ansonsten ist Gleichung (10 auf Seite 6) mit einem druckabhängigem  $W$  zu lösen, z. B.  $W' = W * (1 - p/p_A)$  wobei  $p_A$  für die Schnelligkeit der Änderung des Strahlungsanteils steht. Da  $W$  nicht negativ werden kann, muß  $p_A$  größer als  $p_0$  sein. Der Anteil  $W * p/p_A$  ist die konvektiv transportierte Wärme. Dieser Verlauf des druckabhängigen  $W'$  ist auch eine Vereinfachung, da die Umwandlung von konvektiver Wärme in Strahlungswärme nicht druckproportional ist, sondern so, daß sich ein konstanter Temperaturgradient in der Troposphäre ergibt und in der Stratosphäre gleich Null ist. Trotz dieser Vereinfachung wird wieder das Prinzip ersichtlich.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Nach meiner damaligen Berechnung mit der APS Methode (dass 1/2 der absorbierten Strahlung wieder zum Boden zurück emittiert wird) und unter der Annahme, dass CO<sub>2</sub> 15% der 240 W/qm Bodenstrahlung absorbiert, sind dann bei 85% Fensterstrahlung, 5 K Erwärmung bei 260 K Bodentemperatur und 259 W/qm Emission des Bodens herausgekommen.

Die absorbierte Strahlung wird lokal tatsächlich zu je 50% nach oben und unten emittiert - das geht auch aus Gleichung (6 auf Seite 5) hervor, wo der Anteil der Änderung  $dI$  infolge von  $B(T)$  in beide Richtungen gleich ist. Da aber in Abhängigkeit von der Entfernung vom Emissionsort der neu emittierte Strahlungsanteil mehr oder weniger schnell absorbiert wird und durch Neuemissionen bei verschiedenen Temperaturen ersetzt wird, ist dieses 50%-50%-Verhältnis bei Entfernung vom Emissionsort schon bald verändert. Im übrigen braucht



Diagr. 3: Emissionsspektrum der Erde. Aus [Pierrehumbert, 2011]

das nicht weiter diskutiert zu werden, da die Gültigkeit der Strahlungstransportgleichung anerkannt ist. Insofern ist die nachfolgende Bemerkung nicht zweckdienlich.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Am TOA sind dann  $220 \text{ W/qm}$  Fensterstrahlung und  $20 \text{ W/qm}$  Transmission aus dem  $\text{CO}_2$  emittiert.

Diese  $20 \text{ W/qm}$  aus dem  $\text{CO}_2$  passen auch gut mit dem Emissionsspektrum zusammen, wobei [Pierrehumbert, 2011] ja auf diesen »Dip« bei  $220 \text{ K}$  sogar hinweist (siehe Diagramm 3 - Pfeile nach unten) und als Beleg für den TE (Treibhauseffekt) anführt.

Der »Dip« ist nicht als Beleg für den TE genannt, sondern als Beleg für die lokale Erwärmung in der Ozonschicht in Verbindung mit der Absorptionslänge.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

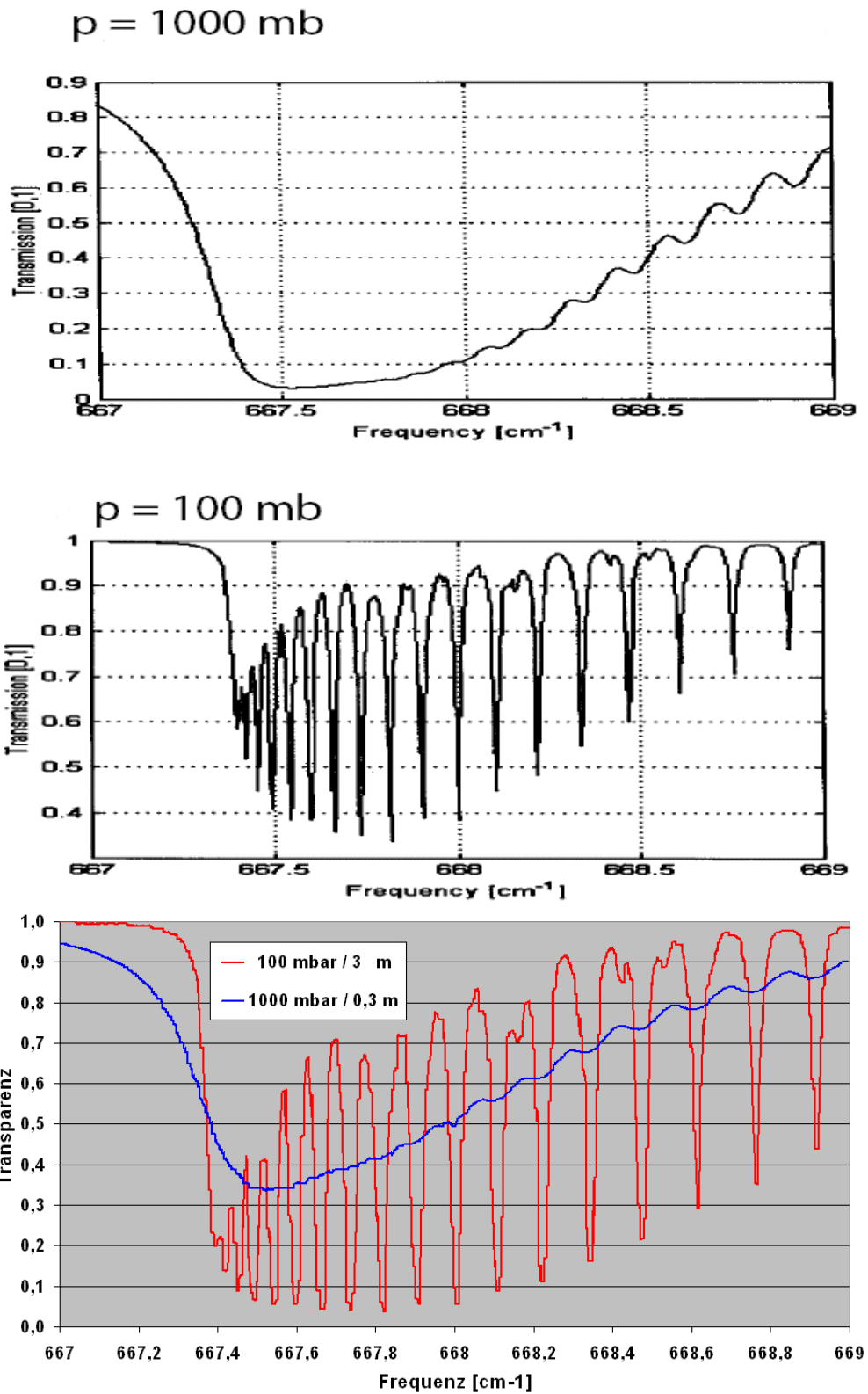
Und nachdem die Stratosphäre ja nun wärmer wird und fast die Bodentemperatur erreicht, hab ich natürlich wieder Zweifel an der Existenz des TE, denn in dem Spektrumbild ist m.E. die »wärmere« Stratosphärenemission nach unten, auch in den  $220 \text{ K}$  Bereich, nicht berücksichtigt.

Bei zunehmender Treibhausgaskonzentration wird die Stratosphäre nicht wärmer, sondern kühler (was auch gemessen wird). Wie Du aus Gleichung (20 auf Seite 7) ersehen kannst, wird im Absorptionsbereich um so weniger Wärme transportiert, je höher die Treibhausgaskonzentration ist ( $W$  wird kleiner). Da sich nun die Temperatur am TOA durch  $W$  bestimmt [aus Gleichung (14 auf Seite 6) für  $p = 0$ ], wird also die Temperatur am TOA kleiner.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Werden wirklich nur die  $\sim 20 \text{ W/qm}$  von der »Effektiven Schicht« des  $\text{CO}_2$  bilanzrelevant emittiert, oder wird am TOA doch mehr vom  $\text{CO}_2$  emittiert, denn die Transmission nimmt zu, je dünner die Luft wird.

»die Transmission nimmt zu, je dünner die Luft wird.« kann ja dadurch unberücksichtigt bleiben, weil mit der Druckhöhe  $p$  gearbeitet wird. Denn: um so dünner die Luft wird, um so größer ist die zu einer bestimmten Druckänderung gehörende Höhenänderung.



Diagr. 4: Beispiel der Transmissionsspektren bei hoher spektraler Auflösung und einem Meter Weglänge bei der typischen  $\text{CO}_2$ -Konzentration in 1000 mb und 100 mb. Aus [Sokolik, 2009, Figure 6.1] – und beide Diagramme auf die gleiche Gasmenge bezogen.

Zitat der Erwiderung eines Zweiflers aus einem Blog:

Der Luftdruck beeinflusst die Absorptionsspektren von Gasen (durch Druck Verbreiterung). Dies stellt ein großes Problem bei der Berechnung der Übertragung von IR-Strahlung durch die Atmosphäre mit unterschiedlichem Druck, Temperatur und Menge von Gasen. Siehe Diagramm 4 auf der vorherigen Seite.

Weiß ich, denn ich hatte ja ausdrücklich der Nachvollziehbarkeit halber ein bestimmtes Absorptionsspektrum angenommen:

Eigenzitat des Autors:

Da es hier nur um das Prinzip geht, werden Vereinfachungen benutzt:

- von der Gesamtheit der Wellenlängen wird Folgendes angenommen: Absorption erfolgt nur in einem bestimmten Wellenlängenbereich
- und in diesem Wellenlängenbereich ist  $\kappa_p$  konstant.

Die Verwendung der realen Transmissionsspektren statt des vereinfachten Transmissionspektrums verändert den genauen Verlauf der Wärmeströme, genau so wie die vollständige Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit die Wärmeströme verändert. Aber die genauere Berechnung verändert zwar den genauen Verlauf - aber nicht die monotone Zunahme der Abwärtsstrahlung aus dem gesamten oberen Halbraum, die bei Null beginnt (bzw. etwas höher durch die Weltraum-Hintergrundstrahlung und die UV-Absorption in großen Höhen - Ozonschicht) und die monotone Abnahme der Strahlung nach oben aus dem unteren Halbraum.

### 3.7 Verlauf mit Konvektion

Ergänzung der Rechnung ab Gleichung (10 auf Seite 6) mit dem Konvektionsansatz  $W' = W * (1 - p/p_A)$ . Dieser Ansatz ist auch nicht ganz real, da

1. die Konvektion im Wesentlichen nur bis zur Tropopause geschieht und
2. keine lineare Druckabhängigkeit ist, weil der Wärmeübergang so ist, daß der lineare Temperaturgradient in der Troposphäre gewährleistet ist - was eine lineare Druckabhängigkeit ausschließt.

Trotz dieser Einschränkungen zeigt auch die vereinfachte Annahme die wesentlichen Folgen der Konvektion.

Mit der linearen Annahme wird aus Gleichung (10 auf Seite 6) die Konvektionsform:

$$2 * \kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = W * \left(1 - \frac{p}{p_A}\right) \quad (32)$$

Die Lösung von Gleichung (32) lautet:

$$I_r = \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - \frac{W * p^2}{4 * \kappa_p * p_A} \quad (33)$$

Auch diese Lösung erfüllt die Randbedingung, denn beim Druck  $p = 0$  beginnt die Abwärtsstrahlung mit der aus dem Weltraum kommenden Strahlung - und die ist fast 0.

Die Lösung Gleichung (33) kann nun in Gleichung (6 auf Seite 5) eingesetzt werden:

$$+ \kappa_p * \frac{d \left[ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - \frac{W * p^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right]}{dp} = - \left[ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - \frac{W * p^2}{4 * \kappa_p * p_A} - B(T) \right] \quad (34)$$

Nach Ausrechnen des Differentialquotienten ergibt sich:

$$\frac{W}{2} - \frac{W * p}{2 * p_A} = - \left[ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} - \frac{W * p^2}{4 * \kappa_p * p_A} - B(T) \right] \quad (35)$$

In Gleichung (35) sind drei Größen festgelegt ( $W$ ,  $\kappa_p$  und  $p_A$ ), so daß Gleichung (35) eine Bestimmungsgleichung für  $B(T)$  ist. Das Umstellen liefert deshalb:

$$B(T) = \left[ 1 + \frac{p}{\kappa_p} - \frac{p}{p_A} - \frac{p^2}{2 * \kappa_p * p_A} \right] * \frac{W}{2} \quad (36)$$

Damit ist die Plancksche Quellfunktion ist mehr linear von der Druckhöhe sondern quadratisch von der Druckhöhe abhängig - und zwar ist die Intensität bei gleichem  $W$  kleiner, weil die Konvektionsterme abgezogen werden.

Wenn  $B(T)$  festliegt, folgt daraus für einen bestimmten Wellenlängenbereich entsprechend der Planckfunktion eine bestimmte Temperatur  $T$ .

Am Boden (beim Druck  $p_0$ ) trifft dann entsprechend Gleichung (33 auf der vorherigen Seite) bei Konvektion folgende Gegenstrahlung  $G$  ( $G = I_r$ ) ein:

$$G = W * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - W * \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} = W * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \quad (37)$$

Die gesamte absorbierte Wärme  $A$  an der Oberfläche ist natürlich auch jetzt die Summe aus Solarstrahlung  $S$  und Gegenstrahlung  $G$  (Bilanz an der Oberfläche):

$$A = S + G \quad (38)$$

Von dieser Gesamtstrahlung wird wieder ein Anteil  $\alpha$  direkt ins Weltall abgestrahlt (außerhalb des absorbierenden Bereiches soll ja keine Absorption stattfinden) und die Summe von Bodenabstrahlung ( $A * \alpha$ ) und Stratosphärenabstrahlung  $W$  soll ja wieder  $S$  sein (Bilanz am TOA):

$$A * \alpha + W = S \quad (39)$$

Einsetzen von Gleichung (67 auf Seite 19) liefert:

$$[S + G] * \alpha + W = S \quad (40)$$

und weiteren Einsetzen von Gleichung (37):

$$\left[ S + W * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \right] * \alpha + W = S \quad (41)$$

Aufgelöst ergibt sich:

$$W * \left[ \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) + 1 \right] = S * (1 - \alpha) \quad (42)$$

$$W = S * \frac{1 - \alpha}{\left[ 1 + \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \right]} \quad (43)$$

Mit Gleichung (37 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (72 auf Seite 19) wird aus Gleichung (67 auf Seite 19):

$$\begin{aligned}
A &= S + W * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \\
&= S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A}}{1 + \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right)} \\
&= S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa_p} \left( 1 - \frac{p_0}{2 * p_A} \right)}{1 + \alpha * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} * \left( 1 - \frac{p_0}{2 * p_A} \right)}
\end{aligned} \tag{44}$$

Faßt man einige Größen zu  $\kappa'_p$  zusammen:

$$\kappa'_p = \frac{\kappa_p}{1 - \frac{p_0}{2 * p_A}} \tag{45}$$

so vereinfacht sich Gleichung (73 auf Seite 20) zu

$$A = S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa'_p}}{1 + \alpha * \frac{p_0}{2 * \kappa'_p}} = S * \left[ 1 + \frac{1 - \alpha}{\frac{2 * \kappa'_p}{p_0} + \alpha} \right] \tag{46}$$

A hat damit formal die gleiche Abhängigkeit von der Absorptionslänge wie die Wirkung der Absorptionslänge bei ruhender Luft - allerdings mit vergrößerter Absorptionslänge, die doppelt so groß werden kann wie ohne Konvektion, da  $p_A$  größer als  $p_0$  sein muß.

Im Grenzfall sehr kurzer Absorptionslängen ( $\kappa_p$  bzw.  $\kappa'_p$  fast 0 = sehr hohe Treibhausgaskonzentrationen) geht Gleichung (75 auf Seite 20) in einen Grenzwert über:

$$A = \frac{S}{\alpha} \tag{47}$$

Damit wird nach dieser Rechnung der Grenzwert  $T_k$  für sehr kleine Absorptionslängen unabhängig von der Konvektion und hängt bei dem angenommenen Absorptions-(Transmissions-)Profil nur von der Absorptionsbreite ab.

Wegen  $A = \sigma T^4$  ergibt sich die Temperatur zu

$$T_k = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\alpha}} \quad \text{mit} \quad T_0 = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}} \tag{48}$$

als Oberflächentemperatur ohne Treibhauseffekt.

Insgesamt also: Mit Konvektion ist der Treibhauseffekt immer geringer als ohne Konvektion - allerdings ist der Grenzwert für kleine Absorptionslängen (= hohe Treibhausgaskonzentrationen) in beiden Fällen gleich.

## 4 Tropopause

Im Absatz nach Gleichung (14 auf Seite 6) ist schon erwähnt, daß die Luftschichtung nicht mehr ruhig bleibt, wenn der Betrag des Temperaturgradienten einen bestimmten Grenzwert  $\Gamma$  ( $\Gamma \approx 6.5 \text{ K/km}$ ) überschreitet. Diese unruhige Luftschichtung ist ein Kennzeichen der Troposphäre. In Diagramm 1 auf Seite 4 ist schon der Isotropenkoeffizient  $i = 0.19$  eingetragen. Damit wird in der Troposphäre die Beziehung zwischen Druck und Temperatur:

$$T(p) = T_0 * \left( \frac{p}{p_0} \right)^i \quad (49)$$

Für den Grenzwert der stabilen Luftschichtung wird der Temperaturgradient gebraucht:

$$\frac{dT(p)}{dh} \quad (50)$$

Unter Anwendung der Kettenregel der Differentialrechnung und Gleichung (4 auf Seite 4) wird daraus (das  $\gg\ll$ -Zeichen wurde weggelassen, da nur der Betrag des Temperaturgradienten verwendet wird):

$$\frac{dT(p)}{dh} = \frac{dT(p)}{dp} * \frac{dp}{dh} = \frac{dT(p)}{dp} * \rho * g \quad (51)$$

Zwischen dem adiabatischem Wert  $\Gamma$  und der Druckableitung besteht damit folgende Beziehung:

$$\Gamma = \frac{dT(p)}{dp} * \rho * g \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(p)}{dp} = \frac{\Gamma}{\rho * g} \quad (52)$$

$\rho$  kann noch durch die allgemeine Gasgleichung ausgedrückt werden:

$$\rho = \rho_0 * \frac{p}{p_0} * \frac{T_0}{T(p)} \quad (53)$$

Aus Gleichung (52) wird mit Gleichung (53):

$$\frac{dT(p)}{dp} = \frac{\Gamma}{\rho_0 * g} * \frac{p_0}{p} * \frac{T(p)}{T_0} \quad (54)$$

Mit Gleichung (49) wird daraus:

$$\frac{dT(p)}{dp} = \frac{\Gamma}{\rho_0 * g} * \frac{p_0}{p} * \left( \frac{p}{p_0} \right)^i = \frac{\Gamma}{\rho_0 * g} * \left( \frac{p}{p_0} \right)^{i-1} \quad (55)$$

Da die Luftschichtung stabil ist, wenn der Temperaturgradient den Grenzwert der adiabatischen Schichtung unterschreitet, entsteht folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{dT(p)}{dp} &< \frac{\Gamma}{\rho_0 * g} * \left( \frac{p}{p_0} \right)^{i-1} \\ &< \frac{\Gamma}{\rho_0 * g} * \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1-i} \end{aligned} \quad \text{für ruhige Luftschichtung} \quad (56)$$

Irgendwann wird bei genügend kleinen Drücken  $p$  die Ungleichung immer erfüllt, d.h. eine Stratosphäre existiert immer.



Mit den bekannten Werten ( $\Gamma = 6.5 \text{ K/km}$ ,  $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}$ ,  $p_0 = 1013 \text{ mbar}$  und  $i = 0, 19$ ) ist die Bedingung für die Erdtropopause<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{dT(p)}{dp} &< \frac{6.5 \text{ K/km}}{1.29 \text{ kg/m}^3 * 9.81 \text{ m/s}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{p} \right)^{0,81} \\ &< 5.14 \times 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{Pa}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{p} \right)^{0,81} \\ &< 0.0514 \frac{\text{K}}{\text{mbar}} * \left( \frac{1013 \text{ mbar}}{p} \right)^{0,81} \quad \text{für ruhige Luftschichtung} \end{aligned} \quad (57)$$

## 5 Ozonschicht

Mit den bisherigen Vereinfachungen nimmt die Temperatur nach oben monoton ab – wenn auch in der Troposphäre etwa linear mit der geometrischen Höhe und in der Stratosphäre mit einem kleineren und sich änderndem Gradienten [Pierrehumbert, 2011].

In der Realität der der Erdatmosphäre steigt weiter oben in der Stratosphäre die Temperatur wieder an. Das ist der Absorption der UV-Solarstrahlung in der Ozonschicht geschuldet.

Wie ist nun diese Absorption zu berücksichtigen? Die absorbierte UV-Energie wird nicht wieder im UV-Bereich ausgestrahlt, sondern ist ein zusätzlicher Wärmeeintrag, der beim Verlauf von  $W$  zu berücksichtigen ist. Für den Wärmeeintrag durch die UV-Absorption ist eine e-Funktion bezüglich der Druckhöhe anzusetzen, weil durch die Absorption die UV-Strahlung geschwächt wird und die Absorption proportional der Zahl der getroffenen Moleküle ist, die in Druckkoordinaten proportional der Druckdifferenz ist.

Vernachlässigt wird hier die Konvektion, was die Nachvollziehbarkeit der Rechnung vereinfacht.

Mit der exponentiellen Annahme der UV-Absorption, die sogar die Realität trifft, wird aus Gleichung (10 auf Seite 6) die Ozonform ( $O$ : Anfangsintensität,  $p_z$ : ist die Abklingkonstante der UV-Erwärmung<sup>4</sup>):

$$2 * \kappa_p * \frac{dI_r}{dp} = W + O * \exp\left(-\frac{p}{p_z}\right) \quad (58)$$

Da  $p_0 \gg p_z$  ist, kann angenommen werden, daß die gesamte Leistung in der Atmosphäre absorbiert wird ( $\exp\left(-\frac{p_0}{p_z}\right) \ll 1$ )

Die Lösung von Gleichung (58) lautet:

$$I_r = \frac{W * p}{2 * \kappa_p} + \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} * \left[ 1 - \exp\left(-\frac{p}{p_z}\right) \right] \quad (59)$$

Auch diese Lösung erfüllt die Randbedingung, denn beim Druck  $p = 0$  beginnt die Abwärtsstrahlung mit der aus dem Weltraum kommenden Strahlung – und die ist fast 0. Das Erfüllen der Randbedingung wurde durch die entsprechende Wahl der Integrationskonstante (die zu dem Term 1 führt) sichergestellt.

<sup>3</sup>Der Druck, bei dem diese Bedingung erfüllt wird, ist breitenabhängig, weil die Dicke der Stratosphäre von der durchtransportierten Leistung abhängt. An den Polen ist diese Leistung klein, in den Tropen groß.

<sup>4</sup>Diese Abklingkonstante  $p_z$  ist in der Realität nach den Daten der Normatmosphäre  $503 \text{ Pa} \approx 5 \text{ mbar}$

Die Lösung Gleichung (59 auf der vorherigen Seite) kann nun in Gleichung (6 auf Seite 5) eingesetzt werden:

$$\kappa_p * \frac{d \left\{ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} + \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} * \left[ 1 - e^{-\frac{p}{p_z}} \right] \right\}}{dp} = - \left\{ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} + \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} * \left[ 1 - e^{-\frac{p}{p_z}} \right] - B(T) \right\} \quad (60)$$

Nach Ausrechnen des Differentialquotienten ergibt sich:

$$\frac{W}{2} + \frac{O * e^{-\frac{p}{p_z}}}{2} = - \left\{ \frac{W * p}{2 * \kappa_p} + \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} * \left[ 1 - e^{-\frac{p}{p_z}} \right] - B(T) \right\} \quad (61)$$

In Gleichung (61) sind vier Größen festgelegt ( $W$ ,  $\kappa_p$ ,  $O$  und  $p_z$ ), so daß Gleichung (61) eine Bestimmungsgleichung für  $B(T)$  ist. Das Umstellen liefert deshalb:

$$B(T) = \left[ 1 + \frac{p}{\kappa_p} \right] * \frac{W}{2} + \left[ \frac{\kappa_p}{p_z} * e^{-\frac{p}{p_z}} + 1 - e^{-\frac{p}{p_z}} \right] * \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} \quad (62)$$

Damit ist die Plancksche Quellfunktion ist mehr linear von der Druckhöhe sondern sogar exponentiell von der Druckhöhe abhängig - und zwar ist die Intensität bei gleichem  $W$  größer, weil die Exponentialterme addiert werden.

Außer dem liefert Gleichung (62) ein Maximum für  $B(T)$  und damit für die Temperatur. Dazu wird  $B(T)$  in Gleichung (62) differenziert und die Ableitung gleich Null gesetzt:

$$\frac{B(T)}{dp} = \frac{W}{2 * \kappa_p} + \left[ -\frac{\kappa_p}{p_z} + 1 \right] * e^{-\frac{p}{p_z}} * \frac{O}{2 * \kappa_p} \stackrel{!}{=} 0 \quad (63)$$

Diese Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung für den Druck im Maximum, der mit  $p_M$  bezeichnet werden soll:

$$\begin{aligned} W &= (\kappa_p - p_z) * \frac{e^{-\frac{p_M}{p_z}}}{p_z} * O \\ \frac{W * p_z}{O * (\kappa_p - p_z)} &= e^{-\frac{p_M}{p_z}} \\ e^{\frac{p_M}{p_z}} &= \frac{O * (\kappa_p - p_z)}{W * p_z} \\ \frac{p_M}{p_z} &= \ln \left[ \frac{O * (\kappa_p - p_z)}{W * p_z} \right] \\ p_M &= p_z * \ln \left[ \frac{O * (\kappa_p - p_z)}{W * p_z} \right] \\ p_M &\approx p_z * \ln \left[ \frac{O * \kappa_p}{W * p_z} \right] \end{aligned} \quad (64)$$

**Anmerkung:** Trotz der erheblichen Vereinfachungen stellt Gleichung (64 auf der vorherigen Seite) eine brauchbare Näherung dar. In der Realität liegt die Ozonspitze bei ca. 50 km Höhe mit einem Druck von ca. 60 mbar. Werden in Gleichung (64 auf der vorherigen Seite) die realen Werte  $O/W \approx 1$ ,  $\kappa_p \approx 30$  mbar [Gleichung (31 auf Seite 9)] und  $p_z \approx 5$  mbar eingesetzt, ergibt sich:

$$p_M \approx 5 \text{ mbar} * \ln \left[ 1 * \frac{30 \text{ mbar}}{5 \text{ mbar}} \right] = 5 \text{ mbar} * \ln 6 \approx 9 \text{ mbar} \quad (65)$$

Wird  $W$ ,  $\kappa_p$  und  $O$  genauer bestimmt ( $p_z$  ist schon relativ genau bestimmt) wird die Übereinstimmung besser. ZU berücksichtigen ist, daß die Werte ohne Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit (siehe Abschnitt 6 auf Seite 21) bestimmt wurden.

Wenn  $B(T)$  (Gleichung (62 auf der vorherigen Seite)) festliegt, folgt daraus für einen bestimmten Wellenlängenbereich entsprechend der Planckfunktion eine bestimmte Temperatur  $T$ .

Am Boden (beim Druck  $p_0$ ) trifft dann entsprechend Gleichung (59 auf Seite 17) bei Konvektion folgende Gegenstrahlung  $G$  ( $G = I_r$ ) ein:

$$G = \frac{W * p_0}{2 * \kappa_p} + \frac{O * p_z}{2 * \kappa_p} * \left[ 1 - \exp \left( - \frac{p_0}{p_z} \right) \right] \quad (66)$$

Die gesamte absorbierte Wärme  $A$  an der Oberfläche ist natürlich auch jetzt die Summe aus Solarstrahlung  $S$  und Gegenstrahlung  $G$  (Bilanz an der Oberfläche):

$$A = S + G \quad (67)$$

Von dieser Gesamtstrahlung wird wieder ein Anteil  $\alpha$  direkt ins Weltall abgestrahlt (außerhalb des absorbierenden Bereiches soll ja keine Absorption stattfinden) und die Summe von Bodenabstrahlung ( $A * \alpha$ ) und Stratosphärenabstrahlung  $W$  soll ja wieder  $S$  sein (Bilanz am TOA):

$$A * \alpha + W = S \quad (68)$$

Einsetzen von Gleichung (67) liefert:

$$[S + G] * \alpha + W = S \quad (69)$$

und weiteren Einsetzen von Gleichung (37 auf Seite 14):

$$\left[ S + W * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \right] * \alpha + W = S \quad (70)$$

Aufgelöst ergibt sich:

$$W * \left[ \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) + 1 \right] = S * (1 - \alpha) \quad (71)$$

$$W = S * \frac{1 - \alpha}{\left[ 1 + \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \right]} \quad (72)$$

Mit Gleichung (37 auf Seite 14) und Gleichung (72 auf der vorherigen Seite) wird aus Gleichung (67 auf der vorherigen Seite):

$$\begin{aligned}
A &= S + W * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right) \\
&= S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A}}{1 + \alpha * \left( \frac{p_0}{2 * \kappa_p} - \frac{p_0^2}{4 * \kappa_p * p_A} \right)} \\
&= S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa_p} \left( 1 - \frac{p_0}{2 * p_A} \right)}{1 + \alpha * \frac{p_0}{2 * \kappa_p} * \left( 1 - \frac{p_0}{2 * p_A} \right)}
\end{aligned} \tag{73}$$

Faßt man einige Größen zu  $\kappa'_p$  zusammen:

$$\kappa'_p = \frac{\kappa_p}{1 - \frac{p_0}{2 * p_A}} \tag{74}$$

so vereinfacht sich Gleichung (73) zu

$$A = S + S * (1 - \alpha) * \frac{\frac{p_0}{2 * \kappa'_p}}{1 + \alpha * \frac{p_0}{2 * \kappa'_p}} = S * \left[ 1 + \frac{1 - \alpha}{\frac{2 * \kappa'_p}{p_0} + \alpha} \right] \tag{75}$$

A hat damit formal die gleiche Abhängigkeit von der Absorptionslänge wie die Wirkung der Absorptionslänge bei ruhender Luft - allerdings mit vergrößerter Absorptionslänge, die doppelt so groß werden kann wie ohne Konvektion, da  $p_A$  größer als  $p_0$  sein muß.

Im Grenzfall sehr kurzer Absorptionslängen ( $\kappa_p$  bzw.  $\kappa'_p$  fast 0 = sehr hohe Treibhausgaskonzentrationen) geht Gleichung (75) in einen Grenzwert über:

$$A = \frac{S}{\alpha} \tag{76}$$

Damit wird nach dieser Rechnung der Grenzwert  $T_k$  für sehr kleine Absorptionslängen unabhängig von der Konvektion und hängt bei dem angenommenen Absorptions-(Transmissions-)Profil nur von der Absorptionsbreite ab.

Wegen  $A = \sigma T^4$  ergibt sich die Temperatur zu

$$T_k = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\alpha}} \quad \text{mit} \quad T_0 = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}} \tag{77}$$

als Oberflächentemperatur ohne Treibhauseffekt.

Insgesamt also: Mit Konvektion ist der Treibhauseffekt immer geringer als ohne Konvektion - allerdings ist der Grenzwert für kleine Absorptionslängen (= hohe Treibhausgaskonzentrationen) in beiden Fällen gleich.

## 6 Winkelabhängigkeit

Bei Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit kann  $B(T)$  nicht mehr so einfach wie in Gleichung (14 auf Seite 6) bestimmt werden. Um den Unterschied zwischen Parallelstrahlung und Winkelabhängigkeit zu sehen, werden zwei Quellfunktionen vorgegeben (konstant und drucklinear) bei Abwärtsstrahlung mit 0 beginnend.

Ausgangspunkt ist wieder Gleichung (5 auf Seite 4)

$$\kappa_p * \cos \vartheta * \frac{dI}{dp} = - [I - B_k] \quad \text{bzw.} \quad \kappa_p * \cos \vartheta * \frac{dI}{dp} = - [I - B_l * p] \quad (78)$$

Die Lösungen lauten:

$$I = B_k \left[ 1 - \exp \left( \frac{-p}{\kappa_p \cos \vartheta} \right) \right] \quad \text{bzw.} \quad I = B_l \left\{ p - \kappa_p \cos \vartheta \left[ 1 - \exp \left( \frac{-p}{\kappa_p \cos \vartheta} \right) \right] \right\} \quad (79)$$

Die Gesamtstrahlung nach unten ergibt sich als Summe (Integral) über alle Winkel in den unteren Halbraum. Wichtig ist natürlich die Menge der Schrägstrahlen in einem bestimmten Winkelbereich (ist proportional zu  $\sin \vartheta$ ). Damit ist die Gesamtstrahlung  $I_U$  nach unten:

$$I_U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I * \sin \vartheta d\vartheta \quad (80)$$

Zur Integration wird eine Variablensubstitution durchgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{-p}{\kappa_p \cos \vartheta} &= x & 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos \vartheta &= \frac{-p}{\kappa_p * x} & -\infty &\leq x \leq \frac{-p}{\kappa_p} \\ -\sin \vartheta d\vartheta &= \frac{p}{\kappa_p * x^2} dx & -\infty &\leq x \leq \frac{-p}{\kappa_p} \end{aligned} \quad (81)$$

Mit Gleichung (80) und Gleichung (81) wird aus Gleichung (79):

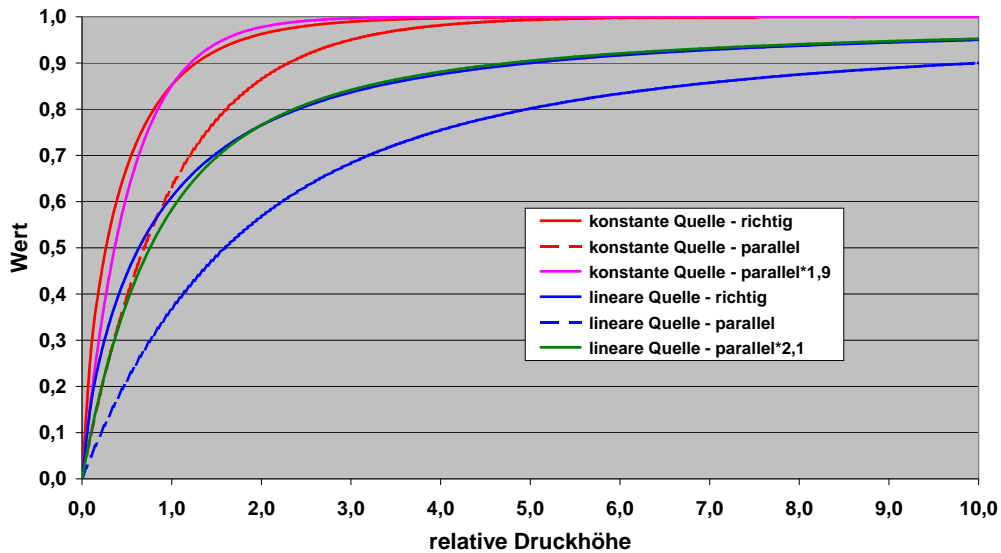
$$\begin{aligned} I_U &= B_k \int_{-\infty}^{\frac{-p}{\kappa_p}} [1 - \exp x] \frac{p dx}{\kappa_p x^2} \quad \text{bzw.} \quad I_U = B_l p \int_{-\infty}^{\frac{-p}{\kappa_p}} \left\{ 1 + \frac{1}{x} * [1 - \exp x] \right\} \frac{p dx}{\kappa_p * x^2} \\ &= \frac{B_k p}{\kappa_p} \int_{-\infty}^{\frac{-p}{\kappa_p}} [1 - \exp x] \frac{dx}{x^2} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{B_l p^2}{\kappa_p} \int_{-\infty}^{\frac{-p}{\kappa_p}} \left\{ 1 + \frac{1}{x} * [1 - \exp x] \right\} \frac{dx}{x^2} \end{aligned} \quad (82)$$

Zur Darstellung wird  $p$  normiert mit

$$p = \kappa_p * y \quad (83)$$

Nach Integration von Gleichung (82) wird mit Gleichung (83) und der Integralexponentialfunktion  $Ei(y)$  ([Bronstein u. a., 2008, S. 517, 1102]:

$$\begin{aligned} I_U &= B_k y \left[ \frac{1}{y} - \frac{e^{-y}}{y} - Ei(-y) \right] \quad \text{bzw.} \quad I_U = B_l p \frac{y}{2} \left[ \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-y}}{y^2} - Ei(-y) \right] \\ &= B_k [1 - e^{-y} - y Ei(-y)] \quad \text{bzw.} \quad = B_l p \frac{1}{2} \left[ 2 - \frac{1}{y} + e^{-y} - \frac{e^{-y}}{y} - y Ei(-y) \right] \end{aligned} \quad (84)$$



Diagr. 5: Intensitätszuwachs der Abwärtsstrahlung bei konstanter und drucklinearer Quellfunktion.

Abzisse: Verhältnis von Druck zu Absorptionsdruck.

- Mit Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit
- Ohne Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit
- Mit scheinbarer Verkürzung der Absorptionslänge

Die Funktionen Gleichung (84 auf der vorherigen Seite) sind in Diagramm 5 dargestellt – als Funktion des Verhältnisses Druckhöhe zu Absorptionskonstante. Zum Vergleich sind auch die Kurven für  $\vartheta = 0$  eingetragen (Annahme von nur Parallelstrahlung). Die richtigen Kurven können durch Parallelstrahlung mit verkürzter Absorptionslänge angenähert werden. Aber es ist zu sehen, daß die Näherung erhebliche Abweichungen zur richtigen Kurve hat und die Verkürzung für verschiedene Quellfunktionen unterschiedlich sein muß.

## 7 Breitenabhängigkeit

Die Breitenabhängigkeit ist noch nicht untersucht, aber die Gleichung (10 auf Seite 6) legt dies nahe, da sich die Temperaturen um so schneller ändern, um so größer die durchgehende Leistung ist. Damit wird der kritische Grenzwert der Luftschichtung schnell erreicht, wenn die transportierte Leistung hoch ist (Äquator) bzw. nur langsam erreicht, wenn die transportierte Leistung niedrig ist (Pole). Durch horizontalen Wärmetransport werden die Leistungsunterschiede gegenüber den Unterschieden der Solareinstrahlung verkleinert.

Es scheint, daß für die Abhängigkeit des Tropopausendruckes  $p_T$  von der Breite  $\psi$  folgender vereinfachter Ansatz gemacht werden kann [Birner, 2003, Abb. 2.6, S. 23] ( $p_P$  Tropopausendruck an den Polen,  $p_A$  Tropopausendruck am Äquator):

$$p_T = p_P + (p_A - p_P) \cos \psi \quad (85)$$

Dabei muß die potentielle Temperatur<sup>5</sup> an den Polen etwa der Oberflächentemperatur am Äquator entsprechen.

<sup>5</sup>Die »potentielle Temperatur« eines Luftpaketes in einer Höhe ist die Temperatur die Temperatur dieses Luftpaketes, wenn es adiabatisch auf den Oberflächendruck komprimiert wird. Die adiabatische Kompression

Die Verringerung der Dickenschwankung der Troposphäre legt auch folgendes Zitat aus [Zachos u. a., 2008] nahe:

About 55 millionyears ago, at the end of the Paleocene, there was a sudden warming event in which temperatures rose by about 6°C globally and by 10 – 20°C at the poles.

Übersetzung:

Vor 55 Millionen Jahren, am Ende des Paläozän, gab es ein plötzliches Erwärmungs-Ereignis [durch CO<sub>2</sub>-Eintrag], in dem Temperaturen über 6°C weltweit stiegen und um 10 – 20°C an den Polen.

## 8 Verzeichnisse

### Abbildungsverzeichnis

1	Temperatur als Funktion der Druckhöhe . . . . .	4
2	Größere Schrägentfernung als Höhendifferenz bei schrägen Strahlen . . . . .	5
3	Emissionsspektrum der Erde. Aus [Pierrehumbert, 2011] . . . . .	11
4	Beispiel der Transmissionsspektren bei hoher spektraler Auflösung und einem Meter Weglänge bei der typischen CO <sub>2</sub> -Konzentration in 1000 mb und 100 mb. Aus [Sokolik, 2009, Figure 6.1] – und beide Diagramme auf die gleiche Gasmenge bezogen. . . . .	12
5	Intensitätszuwachs der Abwärtsstrahlung bei konstanter und drucklinearer Quellfunktion. Abzisse: Verhältnis von Druck zu Absorptionsdruck. – Mit Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit – Ohne Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit – Mit scheinbarer Verkürzung der Absorptionslänge . . . . .	22

### Tabellenverzeichnis

### Literaturverzeichnis

[Birner 2003] BIRNER, Thomas: *Die extratropische Tropopausenregion*. 2003. – URL [http://edoc.ub.uni-muenchen.de/1720/1/Birner\\_Thomas.pdf](http://edoc.ub.uni-muenchen.de/1720/1/Birner_Thomas.pdf) 22

[Bronstein u. a. 2008] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDAJEW, A. K. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage. Frankfurt am Main : Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2008. – ISBN 978-3-8171-2017-8 21

[Pierrehumbert 2011] PIERREHUMBERT, Raymond T.: Infrared radiation and planetary temperature [Infrarot-Strahlung und planetarische Temperatur]. In: *Physics Today* 64 (2011), Januar, S. 33 – 38. – URL <http://geosci.uchicago.edu/~rtp1/papers/PhysTodayRT2011.pdf>. – Kommentierte Übersetzung <http://www.ing-buero-ebel.de/Treib/Pierrehumbert.pdf> 11, 17, 23

---

ist mit Erwärmung verbunden – siehe Gleichung (49 auf Seite 16), allerdings wird für  $i$  der trockenadiabatische Koeffizient genommen.

- [Schack 1972] SCHACK, Alfred: Der Einfluß des Kohlendioxid-Gehaltes der Luft auf das Klima der Welt. In: *Physikalische Blätter* 28 (1972), Nr. 1, S. 26 – 28 3
- [Sokolik 2009] SOKOLIK, Irina N.: *Absorption by atmospheric gases in the IR, visible and UV spectral regions. [Absorption durch atmosphärische Gase im IR, sichtbaren und UV Spektral-Bereich]*. Georgia Institute of Technology. 2009. – URL [http://irina.eas.gatech.edu/irina/EAS8803\\_Fall2009/Lec6.pdf](http://irina.eas.gatech.edu/irina/EAS8803_Fall2009/Lec6.pdf). – access 23.02.2011 12, 23
- [Zachos u. a. 2008] ZACHOS, James C. ; DICKENS, Gerald R. ; ZEEBE, Richard E.: An early Cenozoic perspective on greenhouse warming and carbon-cycle dynamics [Eine Rückschau auf Treibhauseffekt und die Dynamik des Kohlenstoff-Zyklusses in der frühen Erdneuzeit]. In: *Nature* 451 (2008), S. 279 – 283. – URL <http://www.nature.com/nature/journal/v451/n7176/full/nature06588.html> 23