Kommentierter Neusatz von
Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur

J. Stefan

Kommentierung und Bearbeitung
Dipl.-Physiker Jochen Ebel

7. April 2014

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Über die Eigenschaften und Wirkungen von Strahlung bestehen bei einigen Personen noch Unklarheiten - u.a. auch deshalb, weil moderne Arbeiten zur Strahlung von diesen Personen als teilweise unglaubwürdig eingestuft werden.

Besonders witzig ist es mit den Aussagen von Clausius (II. Hauptsatz der Thermodynamik) die Aussagen von Clausius widerlegen zu wollen (siehe [Clausius, 1864]) und Stefan's Aussagen mit Stefan's Aussagen (siehe [Stefan, 1879]) widerlegen zu wollen. Das betrifft besonders die Gegenstrahlung - siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 30.

Deswegen ist es vielleicht hilfreich, das Paper [Stefan, 1879] zu kennen, das ab Abschnitt 0 auf der nächsten Seite neu gesetzt und kommentiert wurde. Ab Abschnitt 2 auf Seite 28 sind Fragen, die damit im Zusammenhang stehen, ausführlich beleuchtet. Stefans empirisch gefundenes Gesetz der 4. Potenz der Temperatur wurde von [Boltzmann, 1884] theoretisch begründet.

Das Paper von [Stefan, 1879] wurde OCR gescannt und wegen der Scan-Fehler neu gesetzt und nachbearbeitet (wahrscheinlich sind nicht alle Scan-Fehler gefunden, ggf. bitte ich um Mitteilung). Beim Neusatz von Stefan's Paper ist die Rechtschreibung an die heutige Schreibweise angepaßt. Die Literaturverweise sind zu einem Literaturverzeichnis zusammengefaßt und dementsprechend die Quellenangaben nur im Literaturverzeichnis. Die Quellenangaben von Stefan sind bei der heutigen Literatursituation nicht immer eindeutig, deswegen können evtl. einem der von Stefan genannten Autoren andere Paper, als die von Stefan gemeinten, zugeordnet sein.

[Stefan, 1879] hat als Druckeinheit immer »Mm.« angegeben. Wahrscheinlich ist damit »mm Quecksilbersäule« gemeint, die heute als »Torr« bezeichnet wird. Deswegen ist konsequent »Mm.« durch »Torr« ersetzt. Dabei ist $1\,\mathrm{Torr} = 133.322\,\mathrm{Pa} = 1.333 \times 10^{-3}\,\mathrm{bar}$. Auch die Wärmeeinheiten sind heute anders. Die Umrechnung auf SI-Einheiten ist: $1\,\frac{\mathrm{gCal}}{\mathrm{Minute\,und\,cm^2}} = 697.3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$.

Gegenüber heute haben bei [Stefan, 1879] die Formelbuchstaben eine andere Bedeutung: Für die Dichte (heute ϱ) wird p (als Gewicht bezeichnet) verwendet und für den Radius (heute fast immer r) wird sowohl r als auch ϱ verwendet.

Kommentare in dem neu gesetzten Paper von Stefan sind in blau.

0 Kopfdaten

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXIX. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1879. - HEFT I BIS V.

(Mit 7 Tafeln und 59 Holzschnitten)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1879.

1 Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur.

Von dem w. M. J. [Stefan, 1879].

1.1 Über die Versuche von Dulong und Petit.

[Dulong und Petit, 1817a] haben aus ihren Beobachtungen über die Abkühlung eines großen Quecksilberthermometers, dessen Kugel bei einigen Versuchen nackt, bei anderen versilbert war, das Resultat gezogen, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge in einer geometrischen Progression wächst, wenn seine Temperatur gleichförmig zunimmt. Die in der Zeiteinheit von einem Körper bei der Temperatur u ausgestrahlte Wärmemenge kann durch die Formel ma^u dargestellt werden, m bedeutet eine von der Größe und Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers abhängige Konstante, a die für alle Körper gleiche Zahl 1.0077.

Dieses Gesetz ist von [Dulong und Petit, 1817a] für zwischen 0° und 280° liegende Temperaturen in Übereinstimmung mit ihren Beobachtungen gefunden worden. Es wurde jedoch auch über diese Grenzen hinaus als gültig angenommen und zuerst von [Pouillet, 1838] zur Bestimmung der Temperatur der Sonne benützt.

Die auffallend kleine Zahl, welche [Pouillet, 1838] für diese Größe fand, hat die Veranlassung gegeben, die Anwendbarkeit des von [Dulong und Petit, 1817a] aufgestellten Gesetzes für höhere Temperaturen zu bestreiten und ist seine Unbrauchbarkeit für solche auch von [Ericsson, 1875] und [Soret, 1872] durch mehrere Versuche nachgewiesen worden.

Die Formel von [Dulong und Petit, 1817a] ist lediglich eine empirische Formel, welche die der Strahlung zugeschriebenen Wärmeabgaben des zu den Versuchen verwendeten Thermometers genau wiedergibt. Dasselbe würden aber auch andere Formeln leisten, nur zeichnet sich die Formel von [Dulong und Petit, 1817a] durch ihre außerordentliche Einfachheit aus. Ich kann jedoch hier eine andere Formel von gleicher, ja man könnte sagen von noch größerer Einfachheit anführen, welche den Beobachtungen auch gut entspricht und in theoretischer Beziehung noch einen Vorzug besitzt.

Man erhält nämlich den von [Dulong und Petit, 1817a] angegebenen Abkühlungsgeschwindigkeiten sehr nahe kommende Zahlen, wenn man annimmt, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional ist. In der folgenden Tabelle sind in der zweiten Reihe die Abkühlungsgeschwindigkeiten enthalten, welche [Dulong und Petit, 1817a] für die in der ersten Reihe stehenden Temperaturen des Thermometers fanden, während die kugelförmige Hülle, in deren Mitte das Thermometer sich befand, auf 0° gehalten wurde. Die in der dritten Reihe stehenden Zahlen erhält man, wenn man die Differenzen $(273 + 80)^4 - 273^4$, $(273 + 100)^4 - 273^4$, usw. durch 6 dividiert und in der folgenden Tabelle hinter der ersten Ziffer, bei dem letzten Quotienten hinter der zweiten, den Dezimalpunkt setzt.

t	Dulong	Berechnet	Differenz
80°	1.74	1.66	+0.08
100	2.30	2.30	0
120	3.02	3.05	-3
140	3.88	3.92	-4
160	4.89	4.93	-4
180	6.10	6.09	+1
200	7.40	7.42	-2
220	8.81	8.92	-11
240	10.69	10.62	+7

Die nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Werte haben gegen die beobachteten die in die letzte Stelle fallenden Unterschiede

$$+2,\ -3,\ -3,\ -1,\ +2,\ +7,\ +6,\ -8,\ +1$$

Letztere Formel entspricht den Beobachtungen allerdings besser, doch sind auch die Abweichungen der ersteren nicht sehr groß.

Es liefert übrigens die Probe, dass eine Formel die von [Dulong und Petit, 1817a] bestimmten Abkühlungsgeschwindigkeiten getreu darstellt, noch nicht den Beweis, dass sie auch nur innerhalb der Grenzen der Beobachtung die von dem Thermometer ausgestrahlte Wärmemenge angibt. Abgesehen von den nicht unbedeutenden Korrektionen, welche die Anwendung des Quecksilberthermometers an den Beobachtungen vorzunehmen notwendig macht, haben die von [Dulong und Petit, 1817a] für die Abkühlung ihres Thermometers angegebenen Zahlen überhaupt nicht die Bedeutung, welche ihnen zugeschrieben wird.

Um dies klar zu legen, wird es notwendig, die Art und Weise wie [Dulong und Petit, 1817a] diese Zahlen erhielten, näher zu betrachten.

Das bis nahe zum Siedepunkte des Quecksilbers erhitzte Thermometer wurde in eine große kupferne Hohlkugel gebracht und aus dieser die Luft bis auf einen kleinen Rest ausgepumpt. Es wird angegeben, dass bei den meisten Versuchen der Druck der in der Hülle zurückgebliebenen Luft 2 Torr nicht überstieg. (Diese Angabe findet sich in [Dulong und Petit, 1817a], wo die Resultate dieser Versuche veröffentlicht sind. In der im Ganzen gleichlautenden Publikation [Dulong und Petit, 1817b] werden 3 Torr statt 2 Torr angegeben.)

Die Wärmeabgabe des Thermometers setzt sich aus zwei Teilen zusammen, aus der Wärme, welche an die Hülle durch Strahlung abgegeben und aus der Wärme, welche durch die im Apparate verbliebene Luft vom Thermometer zur Hülle geführt wird. Um den letzteren Anteil zu finden, wurde eine Reihe von Versuchen ausgeführt, bei welchen die Hülle mit Luft von 720, 360, 180, 90 und 45 Torr Druck gefüllt war. Diese Versuche lehrten, dass mit abnehmender Dichte der Luft die Geschwindigkeiten der Abkühlung des Thermometers immer kleiner werden. Daraus wurde geschlossen, dass die in der Luft von 2 Torr Druck beobachteten Geschwindigkeiten nur wenig von jenen verschieden sind, welche im leeren Raume eintreten würden. Sie wurden zunächst für letztere gesetzt, und von den in Luft von größerer Dichte gefundenen subtrahiert. Die Reste wurden als Maß für die abkühlenden Wirkungen der Luft von den angegebenen verschiedenen Dichten betrachtet und aus denselben eine Formel abgeleitet für die Abhängigkeit dieser Wirkungen von der Dichte der Luft. Nach dieser Formel wurden endlich die bei 2 oder 3 Torr Druck beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten auf solche im leeren Raume reduziert. Auf die so gewonnenen Zahlen ist das Gesetz, welches [Dulong und Petit, 1817a] über die Wärmestrahlung aufstellten, gegründet.

Die Wirkung, welche die Luft bei der Abkühlung eines Körpers übt, ist eine zweifache. Die eine Art (Konvektion) derselben besteht darin, dass die den wärmeren Körper umgebende Luft Wärme aufnimmt, sich ausdehnt, durch den Auftrieb gehoben und durch kältere Luft ersetzt wird. Dieser Prozess wiederholt sich in kontinuierlicher Weise, die so entstehende Strömung führt fortwährend Wärme von dem sich abkühlenden (aber warmen) Thermometer zur kälteren Umgebung. Die zweite Art der Wirkung (Wärmeleitung) der Luft besteht darin, dass die Luft wie ein fester Körper die Wärme leitet und auch, wenn sie zwischen dem wärmeren Thermometer und der kälteren Hülle in vollständiger Rube sich befindet, von dem ersteren Wärme zu der Hülle führt. Während nun die Fortführung der Wärme durch Strömung von der Dichte der Luft abhängig ist, so dass sie mit abnehmender Dichte immer kleiner wird, ist dies bezüglich der Wärmeleitung nicht der Fall. Die Größe der letzteren ist unabhängig von der Dichte solange die freie Weglänge der Moleküle klein gegenüber den Abmessungen der Apparatur ist, sie ist in der Luft von 2 Torr und von noch kleinerem Drucke ebenso groß, wie in der Luft von der gewöhnlichen oder auch von noch größerer Dichte.

Auf diese Eigenschaft der Luft und der Gase überhaupt wurde man zuerst durch die dynamische Theorie des gasförmigen Aggregatzustandes geführt und ich habe schon in der ersten Abhandlung über die Wärmeleitung in Gasen einen Versuch mitgeteilt, durch welchen dieses theoretische Resultat seine Bestätigung gefunden hat. In umfangreicherer Weise ist es noch durch die Versuche von [Kundt und Warburg, 1875] und von [Winkelmann, 1876] nachgewiesen worden. Ich selbst habe mehrere Versuche über die Wärmeleitung der Luft von zwei Atmosphären bis zu 4 Torr Druck ausgeführt und dieselbe in diesem ganzen Intervall konstant gefunden. Um dieses Resultat zu erhalten, ist es notwendig, den Wärmeleitungsapparat so einzurichten, dass die Entwicklung der Strömungen sehr erschwert wird. Dies ist der Fall, wenn die Distanz zwischen der Oberfläche des Thermometers und jener der Hülle sehr klein ist.

Führt man die Versuche mit einem solchen Apparate ans, so erscheint die Abkühlungsgeschwindigkeit unabhängig von der Dichte der Luft. Wählt man aber einen Apparat, in welchem der Einfluss der Strömungen nicht in dem Maß beseitigt ist, so ist das Ergebnis der Versuche folgendes. Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist in gewöhnlicher Luft größer als in verdünnter und nimmt mit steigender Verdünnung ab bis zu einer gewissen Grenze, unter welche sie bei noch weiter fortgesetzter Verdünnung nicht mehr sinkt. Beispiele dieser Art findet man in den Arbeiten von [Kundt und Warburg, 1875] und [Winkelmann, 1876], und schon früher haben [de La Provostaye und Desains, 1846] derlei beobachtet.

Nach diesen Erörterungen ist es nun klar, dass die von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Wirkungen der Luft nur jene Anteile angehen, welche von den Strömungen herrühren. Der von der Wärmeleitung der Luft abhängige Teil ihrer Wirkung, der bei den Versuchen mit verdünnter Luft in vollem Maß vorhanden war, kann durch das eingeschlagene Verfahren nicht in richtiger Weise von der Wirkung der Strahlung losgelöst werden. Die von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten können nicht das Maß für die Wärmestrahlung des Thermometers bilden, sondern nur das Maß für die Summe der Wärmestrahlung des Thermometers und der Wärmeleitung der Luft.

Doch auch letztere Bedeutung kommt den von [Dulong und Petit, 1817a] mitgeteilten Zahlen nur dann zu, wenn die von ihnen ausgeführte Berechnung des Einflusses der Strömungen auch für die bei einem Druck von 2 oder 3 Torr gemachten Beobachtungen richtig ist. Letzteres ist jedoch sehr zweifelhaft.

Bel den Versuchen, aus welchen sie die Formel für den Einfluss der Luft auf die Abkühlung abgeleitet haben, variierte der Druck nur zwischen 720 und 45 Torr Wie schon oben bemerkt wurde, gestaltet sich der Gang der Abkühlung bei größerer Verdünnung wesentlich anders, als bei höheren Drücken. Die Strömungen der Luft können bei den Drucken von 2 oder 3 Torr schon aufgehört und die Luft nur mehr wie ein fester Leiter gewirkt haben. Dann haben die von [Dulong und Petit, 1817a] an den Beobachtungen angebrachten Korrektionen keinen Sinn. Waren aber Strömungen noch vorhanden, so ist ihr Einfluss gewiss ein anderer, als er nach den aus Versuchen bei höheren Drucken abgeleiteten Formeln berechnet wurde.

Es haftet daher an den von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten eine Unsicherheit, gleich der Größe der von ihnen an den Beobachtungen angebrachten Korrektionen. Da sie die unkorrigierten Abkühlungsgeschwindigkeiten nicht mitteilen, so lässt sich diese Größe nicht angeben, sie ist auch gewiss nicht für alle Beobachtungen dieselbe.

Um wenigstens ein angenähertes Maß für diese Größe zu gewinnen, habe ich die fraglichen Korrektionen unter den zwei Voraussetzungen, dass der Druck der im Ballon zurückgebliebenen Luft 2 und 3 Torr betrug, berechnet. Die Formel, welche [Dulong und Petit, 1817a] für die Wirkung der Luft auf die Abkühlung ihres Thermometers aufgestellt haben, ist

$$V = 0.00919\, p^{0.45}\, t^{1.233}$$

und bedeutet darin p den Druck der Luft in Metern, t den Unterschied der Temperaturen des Thermometers und der Hülle. Nach dieser Formel ist die nachstehende Tafel berechnet

	p = 0.002	p = 0.003
	2 Torr	3 Torr
t = 20°	0.02	0.03
40	0.05	0.06
60	0.09	0.11
80	0.12	0.15
100	0.16	0.20
120	0.21	0.25
140	0.25	0.30
160	0.29	0.35
180	0.34	0.41
200	0.39	0.46
220	0.43	0.52
240	0.48	0.58

Dabei ist vorausgesetzt, dass p für alle Temperaturen denselben Wert beibehält, was für den ganzen Verlauf eines Versuches nicht der Fall ist.

Vergleicht man diese Tabelle mit der oben mitgeteilten, welche die Abkühlungsgeschwindigkeiten enthält, so sieht man, dass letztere unsicher sind um Beträge, welche 7 oder 9 Prozent der Geschwindigkeit, welche für $t = 80°$, und 5 oder 6 Prozent von jener ausmachen, welche für $t = 240°$ angegeben ist.

Wenn keine Strömungen im Apparate beständen, so müssten die von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten um ähnliche Beträge, wie sie in der Tabelle enthalten sind, erhöht werden. Es ist aber möglich, dass bei den höheren Temperaturdifferenzen nicht nur dieser wegen, sondern auch, weil für diese die Abkühlung kurz nach dem Auspumpen des Ballons beobachtet wurde, die Luft in bewegtem Zustande sich befand, bei den niedrigeren jedoch nicht.

Ich gehe nun an die Berechnung des Einflusses, welchen die Wärmeleitung der ruhenden Luft auf die Abkühlung des Thermometers nimmt. Die Gleichung für diese Abkühlung ist in folgender Weise aufzustellen.

Bedeutet u_1 die Temperatur des Thermometers zur Zeit t, $-du_1$ die Änderung von u_1 in der Zeit dt, so entspricht dieser die Wärmemenge $-pcdu_1$ oder pcv_1dt, wenn mit p das Gewicht, mit c die spezifische Wärme des Thermometers bezeichnet und die Abkühlungsgeschwindigkeit $-{du_1}/{dt} = v_1$ gesetzt wird.

Die Wärmemenge, welche das Thermometer bei der Temperatur u_1 durch die Einheit seiner Oberfläche in der Zeiteinheit ausstrahlt ist, sei H_1, dieselbe Größe für die Temperatur u_2 sei H_2. Letztere Größe stellt, wenn u_2 die Temperatur der äußeren Hülle ist und diese dasselbe oder ein größeres Emissionsvermögen besitzt, als das Thermometer, die Wärmemenge dar, welche die Einheit der Oberfläche des Thermometers von der Hülle empfängt. Ist r_1 der Radius des Thermometers, so ist die in der Zeit dt durch Strahlung verlorene Wärme

$$4\pi r_1^2(H_1 - H_2)dt.$$

Die durch die Leitung der Luft abgeführte Wärmemenge sei Cdt. Es besteht demnach die Gleichung:

$$pcv_1 = 4\pi r_1^2(H_1 - H_2) + C \tag{1}$$

Um die Größe C zu finden, hat man die Wärmeleitung in einem von zwei konzentrischen Kugelschalen begrenzten Körper zu betrachten. Wird die innere Begrenzung desselben auf der konstanten Temperatur u_1, die äußere auf der konstanten Temperatur u_2 gehalten, so strebt die Temperaturverteilung im Körper einem Beharrungszustand zu, welcher um so schneller sich herstellt, ein je besserer Temperaturleiter der Körper ist. Die Temperatur u an irgend einer Stelle in der Entfernung r von dem Mittelpunkte der beiden begrenzenden Kugelflächen ist in diesem Zustande nur von r abhängig. Die durch eine Kugelfläche vom Radius r in der Zeiteinheit gehende Wärmemenge ist bestimmt durch den Ausdruck

$$W = -\, 4\pi r^2 k \frac{du}{dr} \tag{2}$$

wenn k das Wärmeleitungsvermögen des Körpers bedeutet. W ist für alle Kugelschalen eine und dieselbe Größe, also von r unabhängig und diese Bedingung gestattet, u aus der Gleichung (2) als Funktion von r zu finden.

Bedeutet k das Wärmeleitungsvermögen der Luft, so wird durch W auch die Wärme angegeben, welche einem bei der konstanten Temperatur u_1 gehaltenen kugelförmigen Thermometer durch die Leitung in der Luft entzogen wird.

Bei der Anwendung der Gleichung (2 auf der vorherigen Seite) ist jedoch noch zu berücksichtigen, dass das Leitungsvermögen der Luft von der Temperatur derselben abhängig ist (heute: proportional zur Wurzel aus der absoluten Temperatur). Dasselbe kann hinreichend genau als eine lineare Funktion von u dargestellt werden, so dass unter k_0 den Wert von k für $u = 0$ verstanden,

$$k = k_0(1 + \alpha u) \qquad \Rightarrow \qquad k = k_0\sqrt{\frac{u}{T_0}} \qquad \text{(anders)}$$

gesetzt werden kann.

Das Gesetz der Temperaturverteilung in der in Betracht stehenden Kugelschale ist demnach durch die Gleichung

$$W = -\, 4\pi r^2 k_0(1 + \alpha u)\frac{du}{dr} \qquad \Rightarrow \qquad W = -\, 4\pi r^2 k_0\sqrt{\frac{u}{T_0}}\frac{du}{dr}$$

bestimmt und folgt daraus die Formel

$$D + \frac{W}{r} = 4\pi k_0\left(u + \frac{\alpha u^2}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad D + \frac{W}{r} = \frac{8\pi k_0}{3}\sqrt{\frac{u^3}{T_0}}$$

worin D die Integrationskonstante bedeutet.

Sind r_1 und r_2 die Radien der inneren und äußeren Schalen, denen die Temperaturen u_1 und u_2 entsprechen, so erhält man

$$W = \frac{4\pi r_1 r_2 k_0}{r_2 - r_1}\left(u_1 + \frac{\alpha u_1^2}{2} - u_2 - \frac{\alpha u_2^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{8\pi r_1 r_2 k_0}{3(r_2 - r_1)\sqrt{T_0}}\left(\sqrt{u_1^3} - \sqrt{u_2^3}\right) \tag{3}$$

Obwohl bei den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a] die Temperatur des Thermometers keine Konstante ist, so kann man doch die demselben durch die Leitung in der Luft während einer sehr kleinen Zeit entzogene Wärme mach der Gleichung (3) berechnen. Das Wärmeleitungsvermögen der Luft ist zwar sehr klein, 20 000 mal kleiner als das des Kupfers, die Ausgleichung der Temperaturen in der Luft geht jedoch mit sehr großer Geschwindigkeit vor sich. Denn diese Geschwindigkeit ist von dem Quotienten aus dem Leitungsvermögen und der spezifischen Wärme der Volumeneinheit abhängig. Sie ist für Kupfer nur 3 mal so groß als wie für Luft von normaler Dichte. Wird aber die Luft bis auf 2 Torr Druck verdünnt, somit die spezifische Wärme ihrer Volumeneinheit um das 380 fache verkleinert, so steigt in demselben Maß die Größe der Temperaturleitung und wird 127 mal größer als jene des Kupfers.

Man kann also die durch die Gleichung (3) gegebene Wärmemenge W für die Größe C in die Gleichung (1 auf der vorherigen Seite) einsetzen.

Was die Gleichung (3) anbetrifft, so kann man den in der Klammer stehenden Ausdruck

$$u_1 + \frac{\alpha u_1^2}{2} - u_2 - \frac{\alpha u_2^2}{2} = u_1 - u_2 + \frac{\alpha}{2}(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = (u_1 - u_2)\left(1 + \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_2)\right)$$

$$W = \frac{8\pi r_1 r_2 k_0(u_1 - u_2)}{3(r_2 - r_1)}\ \frac{\sqrt{u_1^3} - \sqrt{u_2^3}}{\sqrt{T_0}(u_1 - u_2)} \approx \frac{4\pi r_1 r_2 k_0(u_1 - u_2)}{r_2 - r_1}\ \sqrt[4]{\frac{u_1 * u_2}{T_0^2}} \qquad \textit{weil}$$

$$\frac{\sqrt{u_1^3}-\sqrt{u_2^3}}{\sqrt{T_0}(u_1-u_2)}*1 \quad = \frac{\sqrt{u_1^3}-\sqrt{u_2^3}}{\sqrt{T_0}(u_1-u_2)}*\frac{\sqrt{u_1^3}+\sqrt{u_2^3}}{\sqrt{u_1^3}+\sqrt{u_2^3}} = \frac{u_1^3-u_2^3}{\sqrt{T_0}(u_1-u_2)}*\frac{1}{\sqrt{u_1^3}+\sqrt{u_2^3}}$$

$$= \frac{u_1^2+u_1u_2+u_2^2}{\sqrt{T_0}\left(\sqrt{u_1^3}+\sqrt{u_2^3}\right)} = \frac{u_1u_2}{\sqrt{T_0}\sqrt[4]{u_1^3u_2^3}}*\frac{\frac{u_1}{u_2}+1+\frac{u_2}{u_1}}{\sqrt{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{u_1u_2}}{\sqrt{T_0}}*\frac{\frac{u_1}{u_2}+1+\frac{u_2}{u_1}}{\sqrt{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3}} \approx \frac{\sqrt[4]{u_1u_2}}{\sqrt{T_0}}*\frac{3}{2} \qquad \textit{weil}$$

$$\lim_{u_1\to u_2}\frac{\frac{u_1}{u_2}+1+\frac{u_2}{u_1}}{\sqrt{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3}} = \frac{3}{2}$$

in die zwei Faktoren $u_1 - u_2$ und $1 + \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_2)$ bzw. $\left(\frac{\sqrt[4]{u_1u_2}}{\sqrt{T_0}}*\frac{3}{2}\right)$ zerlegen.

Letzterer mit k_0 multipliziert, bedeutet das Wärmeleitungsvermögen der Luft für den Mittelwert der beiden Temperaturen u_1 und u_2 und ist W diesem mittleren Wert des Leitungsvermögens und der Temperaturdifferenz $u_1 - u_2$ proportional.

Für die auszuführenden numerischen Rechnungen bietet jedoch diese Zerlegung keinen Vorteil.

Wichtiger ist es, zu bemerken, dass W als Differenz zweier von u_1 und u_2 abhängiger Größen erscheint, und dass man für W immer einen Ausdruck von der Form

$$W = f(u_1) - f(u_2)$$

erhält, welcher Art auch die Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der Temperatur sein mag. Man kann also auch den durch die Leitung der Luft bedingten Wärmeverlust der inneren Kugel betrachten als das Resultat von zwei Wärmeströmen, von denen der eine von der Kugel zur äußeren Hülle, der zweite in umgekehrter Richtung vor sich geht, jeder unabhängig von dem anderen. Es verhält sich also der Wärmeaustausch durch Leitung analog jenem, welcher zwischen verschieden warmen Körpern durch Strahlung vermittelt wird. Die von [Dulong und Petit, 1817a] angegebenen Werte der Abkühlungsgeschwindigkeiten besitzen auch diese Eigenschaft, dass sie sich als Differenzen zweier Größen darstellen lassen, von welchen die eine nur von der Temperatur des Thermometers (= Innenkugel), die andere nur von der Temperatur der Hülle (= Außenkugel) abhängig ist.

Die Zerlegung von W oder C in zwei von u_1 und u_2 abhängige Teile ist auch für die numerische Berechnung derselben von Vorteil. Ich will deshalb die Bezeichnung

$$L = k_0\left(u + \frac{\alpha u^2}{2}\right) \tag{4}$$

einführen und durch L_1 und L_2 die Werte darstellen, welche L nach Einführung von u_1 und u_2 für u erhält. Die Gleichung (1 auf Seite 7) lässt sich dann so schreiben

$$pcv_1 = 4\pi r_1^2(H_1 - H_2) + \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}(L_1 - L_2) \tag{5}$$

Zur Berechnung des Einflusses der Leitung auf die Abkühlungsgeschwindigkeit ist noch die Kenntnis von p und c notwendig.

[Dulong und Petit, 1817a] haben nicht die zur genauen Bestimmung dieser Größen erforderlichen Daten, sondern nur den Radius der Thermometerkugel $r_1 = 3\,\mathrm{cm}$ angegeben. Ich will also pc so berechnen, als handelte es sich lediglich um eine Quecksilberkugel von 3 cm Radius. Ist s das spezifische Gewicht des Quecksilbers, so wird

$$p = \frac{4\pi r^3 s}{3}$$

und die Abkühlungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{3}{r_1 cs}(H_1 - H_2) + \frac{3r_2}{r_1^2(r_2 - r_1)cs}(L_1 - L_2) \tag{6}$$

Setzt man c = 0.0332, s = 13.6, also cs = 0.45 und berücksichtigt, dass der Radius r_2 der äußeren Hülle für den von [Dulong und Petit, 1817a] benutzten Apparat = 15 cm ist, so reduziert sich der Faktor von L_1 - L_2 auf $\frac{25}{27}$.

Zur Berechnung von L nehme ich $k_0 = 0.000054\,\frac{\mathrm{gCal}}{\mathrm{sec\,cm\,K}} = 0.0226\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$, heute $0.024\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$, $\alpha = 0.0027\,\frac{1}{K} = \frac{1}{370\,\mathrm{K}}$ an. Die erstere Zahl gibt das Wärmeleitungsvermögen der Luft unter Voraussetzung des Gramms, des Zentimeters und der Sekunde als Einheiten. Durch Gleichsetzung des Wärmeleitungsvermögen bei 273 K (= 0 °C) und 373 K (= 100 °C) mit dem linearen Ansatz und Wurzelansatz - siehe Gleichung (anders auf Seite 8) - kann das durchschnittliche α berechnet werden zu $\frac{\sqrt{\frac{373}{273}} - 1}{373 - 273} = 0.0017$ für 0 °C : 100 °C und $\frac{\sqrt{\frac{513}{273}} - 1}{513 - 273} = 0.0057$ für 0 °C : 240 °C.

[Dulong und Petit, 1817a] haben bei der Bestimmung der Abkühlungsgeschwindigkeit die Minute als Einheit gewählt, dem entsprechend ist obige Zahl noch mit 60 zu multiplizieren, also $k_0 = 0.00324\,\frac{\mathrm{gCal}}{\mathrm{Min\,cm\,K}}$ zu setzen.

Die folgende Tafel enthält für die in der ersten Kolonne stehenden Temperaturen die Werte von L in der zweiten und diese Werte mit $\frac{25}{27}$ multipliziert in der dritten Reihe (siehe roter Kasten auf der nächsten Seite).

Für die erste Beobachtungsreihe, welcher $u_2 = 0$ entspricht, findet man in der letzten Kolonne dieser Tafel unmittelbar die auf die Wärmeleitung entfallenden Anteile der Abkühlungsgeschwindigkeiten. Für die übrigen Beobachtungsreihen werden diese Anteile durch die Differenzen der oberen Glieder der Kolonne gegen das unterste, oder das zweite usw. gefunden. Um den Einfluss dieser Korrektionen auf die Werte der Abkühlungsgeschwindigkeiten ersichtlich zu machen, will ich die Daten der ersten Beobachtungsreihe und die zugehörigen Korrektionen neben einander stellen (siehe blauer Kasten auf der nächsten Seite).

Die Korrektionen betragen demnach 15 % für die bei den niedrigsten, 10 % für die bei den höchsten Temperaturen beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten. Sie betragen zufälligerweise fast genau das Doppelte von jenen, welche ich oben nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] unter der Annahme eines Druckes von 2 Torr berechnete.

u = 20	L = 0.0665	0.062
40	0.1366	0.126
60	0.2101	0.194
80	0.2872	0.264
100	0.3677	0.340
120	0.4518	0.418
140	0.5392	0.499
160	0.6304	0.584
180	0.7249	0.671
200	0.8230	0.762
220	0.9245	0.856
240	1.0295	0.953
260	1.1381	1.054
280	1.2501	1.157

240°	10.69	0.95
220	8.81	0.86
200	7.40	0.76
180	6.10	0.67
160	4.89	0.58
140	3.88	0.50
120	3.02	0.42
100	2.30	0.34
80	1.74	0.26

Obwohl der Anteil der Wärmeleitung an der Abkühlung ein beträchtlicher ist, so wird durch dessen Berücksichtigung das Gesetz der Abkühlung nicht bedeutend modifiziert. Vor allem ist zu bemerken, dass die wegen der Wärmeleitung korrigierten Zahlen noch rascher mit der Temperatur ansteigen, als die nicht korrigierten.

Wesentlich anders gestaltet sich jedoch die Sache für die Beobachtungen, welche [Dulong und Petit, 1817a] mit dem versilberten Thermometer gemacht haben.

Die folgende Tabelle enthält zwei zusammengehörige Reihen über die Abkühlung des nackten und des versilberten Thermometers, die wegen der Wärmeleitung anzubringenden Korrektionen und die korrigierten Werte der Abkühlungsgeschwindigkeiten. Die erste Kolonne enthält nicht die Temperaturen des Thermometers, sondern die Differenzen derselben gegen jene der Hülle, welche bei diesen Versuchen bei der konstanten Temperatur 20° gehalten wurde (siehe blauer Kasten auf der nächsten Seite).

Wie diese Tabelle zeigt, sind die an den Abkühlungsgeschwindigkeiten des versilberten Thermometers vorzunehmenden Korrektionen so groß, dass der übrig bleibende Rest nur einen kleinen Bruchteil des unkorrigierten Wertes bildet, für die niedrigste der Beobachtungstemperaturen $\frac{1}{6}$, für die höchste ungefähr die Hälfte.

Alle Folgerungen, welche [Dulong und Petit, 1817a] aus ihren Beobachtungen über die Wärmestrahlung des Silbers gezogen haben, verlieren hiermit ihre Begründung. Die von ihnen für das nackte und das versilberte Thermometer angegebenen Abkühlungsgeschwindigkeiten stehen in einem für alle Temperaturen nahezu kontanten Verhältnisse zu einander, dessen Wert = 5.7 sich ergibt. Diese Zahl haben auch [Dulong und Petit, 1817a] als das Verhältnis zwischen dem Ausstrahlungsvermögen des Glases und jenem des Silbers betrach-

Temperatur-Differenzen	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Korrektion	Korrigierte Geschwindigkeiten	
	Glas	Silber		Glas	Silber
20°	0.39	0.07	0.06	0.33	0.01
40	0.86	0.15	0.13	0.73	0.02
60	1.40	0.24	0.20	1.20	0.04
80	1.99	0.34	0.28	1.71	0.06
100	2.74	0.47	0.36	2.38	0.11
120	3.56	0.62	0.44	3.12	0.18
140	4.57	0.81	0.52	4.05	0.29
160	5.67	1.02	0.61	5.06	0.41
180	7.04	1.26	0.70	6.34	0.56
200	8.58	1.53	0.79	7.79	0.74
220	10.41	1.83	0.89	9.52	0.94
240	12.40	2.18	0.99	11.41	1.19

tet. Dieselbe gibt jedoch, abgesehen von den Fehlern der Versuche, nur das Verhältnis zwischen den Summen aus der Wärmestrahlung des Thermometers und der Wärmeleitung der Luft und ist viel kleiner als das Verhältnis des Strahlungsvermögens des Glases und des Silbers. Diese Zahl hat keine absolute Bedeutung, sondern ist von der Anordnung des Apparates abhängig. Wählt man zu den Versuchen ein kleineres Thermometer, so wird der Einfluss der Wärmeleitung im Vergleich zu jenem der Strahlung vergrößert, in Folge dessen werden die Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten und versilberten Thermometers einander näher gebracht. [Dulong und Petit, 1817a] haben auch mit einem kleineren Thermometer einige Versuche ausgeführt und diese liefern für das Verhältnis der Abkühlungsgeschwindigkeiten nicht 5.7, sondern viel kleinere Werte, von 2.5 bis 2.9. Allerdings hat zu dieser großen Differenz zwischen den Beobachtungen mit dem kleinen und jenen mit dem großen Thermometer der vergrößerte Einfluss der Wärmeleitung nicht allein beigetragen.

[Dulong und Petit, 1817a] haben bei ihren Versuchen mit den versilberten Thermometern nur die Kugeln, nicht auch die Röhren versilbert, welchen Fehler schon [de La Provostaye und Desains, 1846] erkannt und bei ihren Abkühlungsversuchen auch vermieden haben. Die von [Dulong und Petit, 1817a] beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten der versilberten Thermometer bedürfen deshalb, wenn sie als Maß der Strahlung des Silbers dienen sollen, noch einer weiteren Verminderung wegen der Strahlung der Thermometerröhre. Den Betrag derselben genau zu berechnen, ist nicht leicht, in diesem Falle auch nicht möglich, da ein wesentliches Datum, die Größe des Querschnittes der Röhre fehlt. Zur Beurteilung des Wertes der von [Dulong und Petit, 1817a] gemachten Beobachtungen ist es jedoch notwendig, wenigstens eine beiläufige Vorstellung von der Größe dieses Fehlers sich zu verschaffen.

Bezeichnet man mit ϱ den Radius der Röhre, mit l die Länge der Röhre, mit r den Radius der Kugel des Thermometers, so stehen die Oberflächen der Röhre $(2\pi\varrho h)$ und der Kugel $(4\pi r^2)$ in dem Verhältnis von $\varrho h : 2r^2$. Für das große Thermometer ist $r = 3$, $h = 12\,\mathrm{cm}$, für ϱ nehme ich $= 0.15$, ein Betrag, der wohl nicht zu groß sein dürfte, da an der Röhre doch eine 3 Pfund Quecksilber enthaltende Kugel angeblasen war. Das Verhältnis zwischen den beiden Oberflächen ist demnach wie 1:10 und ebenso würden sich auch die von denselben ausgestrahlten Wärmemengen verhalten, wenn Röhre und Kugel gleiche Temperatur hätten. Die Temperatur der ersteren fällt jedoch gegen die Wand des Ballons ab und ich will annehmen, dass in Folge dessen die Röhre dreimal weniger Wärme ausstrahlt, als sie es bei der Temperatur der Kugel tun würde. Sie strahlt also 30 mal weniger Wärme aus als die Kugel, wenn diese unbedeckt ist. Ist aber die Kugel versilbert, dann wird, da das Ausstrahlungsvermögen des Silbers nahe 30 mal kleiner ist als jenes des Glases, die Ausstrahlung der Röhre jener der Kugel gleich. Könnte man also an den Beobachtungen von [Dulong und Petit, 1817a] alle durch die Strömungen und durch die Leitung der Luft bewirkten Wärmeverluste des Thermometers in exakter Weise in Rechnung bringen, so würden die so korrigierten Beobachtungen noch immer das Verhältnis des Strahlungsvermögens des Silbers zu jenem des Glases doppelt zu groß geben.

Bei solcher Sachlage kann man auch dem Umstand, dass die wegen der Wärmeleitung korrigierten Abkühlungsgeschwindigkeiten des versilberten Thermometers 30 mal kleiner sind, als die des nackten, keinen Wert beilegen, ebenso wenig daraus, dass das Verhältnis für höhere Temperaturen ein anderes wird, schließen, dass das Ausstrahlungsvermögen des Silbers mit steigender Temperatur rascher zunimmt, als das des Glases. Es haben [de La Provostaye und Desains, 1846] aus ihren Versuchen gerade das Entgegengesetzte gefolgert, bei welchen übrigens ebenfalls die Strahlung der metallischen nur Abkühlung nur den kleineren Betrag, die Wärmeleitung der Luft den größeren lieferte.

Die von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten liefern nach der vorausgegangenen Diskussion derselben, auch wenn sie wegen der Wärmeleitung der Luft korrigiert werden, kein sicheres Maß für die Wärmestrahlung des Thermometers. Von den Versuchen von [de La Provostaye und Desains, 1846] sind nur sehr wenige bei so geringen Drucken ausgeführt, dass man die Wirkung der Luft auf ihre Leitung beschränkt annehmen kann und in den Fällen, in welchen sie das zylindrische Thermometer anwendeten, ist überhaupt die Berechnung der Wärmeleitung nicht möglich.

Man kann übrigens, auch ohne den Einfluss der Luft auf den Wärmeaustausch zu kennen, die Abkühlungsversuche zur Prüfung der aufgestellten Strahlungsgesetze verwenden, wenn Beobachtungen über die Abkühlung eines und desselben Körpers bei zwei verschiedenen Oberflächen aber unter sonst gleichen Umständen gemacht sind.

Die Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten des Thermometers mit nackter und mit versilberter Kugel sind die Maße für die Unterschiede der Strahlungsvermögen des Glases und des Silbers. Diese Zahlen sind sowohl von dem Einfluss des Stieles, als auch von jenem der Wärmeleitung frei und zum mindesten mit großer Annäherung auch frei von dem Einfluss der Strömungen.

Ich will in dieser Weise zwei von [Dulong und Petit, 1817a] mitgeteilte Beobachtungsreihen verwerten, welche sich auf die Abkühlung des nackten und versilberten Thermometers bei demselben Druck von 720 Torr beziehen. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Reihe die Differenzen der Temperatur des Thermometers gegen jene der Hülle, welche 20° betrug.

Die Bedeutung der Zahlen in den übrigen Reihen ist durch die Überschriften gegeben (siehe blauer Kasten auf der nächsten Seite).

Die Unterschiede der Abkühlungsgeschwindigkeiten müssen, wenn die von [Dulong und Petit, 1817a] aufgestellte Formel für die Wärmestrahlung für Glas und Silber richtig ist, ebenfalls mit dieser Formel in Übereinstimmung stehen. Ist die Ausstrahlung des Glases durch ma^u, jene des Silbers durch $m'a^u$ gegeben, so ist ihr Unterschied durch $(m - m')a^u$ bestimmt und wenn δ die Temperaturdifferenz zwischen Thermometer und Hülle bedeutet, die Differenz der Abkühlungsgeschwindigkeiten dem Ausdrucke $(m-m')(a^\delta-1)$ proportional.

Dividiert man die Differenzen der Reihe nach durch die entsprechenden Werte des Ausdruckes $a^\delta - 1$, so erhält man die Quotienten

$$1.911, 1.977, 1.950, 1.947, 1.944, 1.972,$$

t	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Unterschied
	Glas	Silber	
100°	4.99	2.80	2.19
120	6.46	3.50	2.96
140	8.05	4.32	3.73
160	9.85	5.19	4.66
180	11.76	6.02	5.74
200	14.04	6.93	7.11

welche nur wenig von ihrem Mittelwerte 1.95 abweichen. Diese Übereinstimmung ist ein besserer Beweis für die Brauchbarkeit der angewendeten Formel, als die Übereinstimmung, welche die von [Dulong und Petit, 1817a] für den leeren Raum berechneten Abkühlungsgeschwindigkeiten mit derselben zeigen.

Ebenso gut stimmen die in Rede stehenden Differenzen auch mit der Formel, nach welcher die Strahlung der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional ist. Bedeutet T_1 die absolute Temperatur des Thermometers, T_2 jene der Hülle, so erhält man die in der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle angeführten Zahlen durch die entsprechenden Werte von $T_1^4 - T_2^4$ dividierend, ohne Rücksichtnahme auf den Stellenwert der Ziffern die Quotienten

$$1329,\ 1363,\ 1343,\ 1341,\ 1345,\ 1375,$$

welche einander ebenso nahe liegen, wie die obigen und mit diesen auch in Bezug auf die Abweichungen von dem Mittelwerte in gleichartiger Weise sich verhalten. Das Mittel aus diesen Zahlen ist 1350 und zwar ist der wahre Wert desselben 135×10^{-12}.

Ich will nun in derselben Weise auch einige der Beobachtungen von [de La Provostaye und Desains, 1846] benutzen. Die zuerst zu betrachtenden beziehen sich auf die Abkühlung eines zylindrischen Thermometers (nackt und versilbert) von 2 cm Durchmesser und 7 cm Höhe in einer geschwärzten zylindrischen Hülle von 6 cm Durchmesser und 20 cm Höhe. Diese Versuche sind nur zu Differenzbestimmungen geeignet, zu diesen eignen sie sich aber besser als die früher betrachteten von [Dulong und Petit, 1817a]. Sie sind unter dem kleinen Drucke von 6 Torr ausgeführt. Es dürften bei denselben die Strömungen kaum einen merklichen Einfluss auf die Abkühlung genommen haben, so dass die Wirkung der Luft nur auf ihre Leitung beschränkt war. Dann fällt aber diese Wirkung bei der Subtraktion der Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten und des versilberten Thermometers vollständig weg.

Die Temperatur der Hülle war 14.7°. Die erste Reihe der folgenden Tabelle gibt die Temperaturen des Thermometers. Die beiden anderen Reihen geben die Geschwindigkeiten der Abkühlung und zwar liegt diesen nicht die Minute, sondern die Sekunde als Zeiteinheit zu Grunde (siehe blauer Kasten auf der nächsten Seite).

Dividiert man die in der letzten Reihe stehenden Differenzen durch die Differenzen der vierten Potenzen der absoluten Temperaturen des Thermometers und der Hülle, so erhält man folgende Quotienten

$$4648,\ 4588,\ 4621,\ 4624,\ 4641$$

welche gut mit einander stimmen. Es passt zu diesen Versuchen die neue Formel besser, als jene von [Dulong und Petit, 1817a]. Die obigen Differenzen geben nämlich durch die entsprechenden Werte von $a^\delta - 1$ dividiert die Quotienten

t	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenzen
	Glas	Silber	
75.1	0.05675	0.02035	0.03640
96.86	0.08318	0.02876	0.05442
108.6	0.09966	0.03333	0.06633
121.884	0.11934	0.03859	0.08075
136.584	0.14360	0.04479	0.09881

6212, 6236, 6327, 6373, 6432.

Von den mit demselben Thermometer ausgeführten Beobachtungen will ich noch zwei korrespondierende Reihen anfügen. Die Oberfläche des Thermometers war einmal geschwärzt, das andere Mal vergoldet. Die Abkühlung geschah in einem großen Ballon von 24 cm Durchmesser 14.7° Temperatur und bei einem Druck von 88 Torr Die erste Reihe der folgenden Tabelle enthält die Temperaturen des Thermometers

t°	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenzen
	Schwarz	Vergoldet	
63.57	0.05057	0.01973	0.03084
108.58	0.11697	0.04346	0.07351
121.77	0.14070	0.05078	0.08992

Die letzten drei Zahlen geben, verglichen mit der Formel der vierten Potenzen, die Quotienten

5156, 5123, 5157

und mit der Formel von [Dulong und Petit, 1817a], die Quotienten

6818, 7014, 7109.

Während die ersten wieder sehr genau unter einander stimmen, zeigen die letzteren dieselbe Art der Abweichung, wie die oben gefundenen, sie werden nämlich für steigende Temperaturen immer größer.

Für die Temperaturen 108.58° und 121.77° sind auch die Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten Thermometers

0.10864, 0.12960

angegeben, deren Unterschiede gegen die des vergoldeten nach der neuen Formel die Quotienten

4542, 4521

und nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] die Quotienten

6220, 6231

geben. Diese Zahlen können dazu dienen, das Verhältnis der Emissionsvermögen des geschwärzten und nackten Thermometers zu bestimmen.

[de La Provostaye und Desains, 1846] haben noch mit einem zweiten Thermometer mehrere Beobachtungen ausgeführt, welche einige für den vorliegenden Zweck verwendbare korrespondierende Daten enthalten. Dieses Thermometer war kugelförmig, der Durchmesser der Kugel wird = 3 cm angegeben. Dieselbe war bei der einen Versuchsreihe geschwärzt, bei der anderen versilbert. Das Thermometer befand sich in dem kugelförmigen Ballon von 24 cm Durchmesser und wurde seine Abkühlung bei drei verschiedenen Drücken beobachtet, die Geschwindigkeiten der Abkühlung sind für drei Temperaturen angegeben. Die Temperatur der Hülle war in allen Fällen 14.7°. Die erste Reihe der folgenden Tabelle enthält die Temperaturen des Thermometers, die zweite die Drücke der Luft im Ballon.

t	Druck Torr	Geschwindigkeiten der Abkühlung		Differenzen
		Schwarz	Versilbert	
48.18°	5	0.02901	0.00852	0.02049
55.55°	156	0.04725	0.02132	0.02593
	76	0.04354	0.01749	0.02605
	5	0.03667	0.01062	0.02605
80.98°	156	0.08598	0.03778	0.04820
	76	0.07849	0.03080	0.04769

Die aus den Beobachtungen bei derselben Temperatur, aber bei verschiedenen Drücken abgeleiteten Differenzen stimmen sehr nahe überein, ein Beweis, dass durch die Bildung dieser Differenzen Zahlen gewonnen werden, welche von dem Einfluß der Luft auf die Abkühlung frei sind.

Die Mittelwerte der Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten geben durch die zugehörigen Differenzen der vierten Potenzen der absoluten Temperaturen dividiert die Quotienten

5407, 5418, 5417

und zwar ist der wirkliche Wert des Mittels aus diesen drei sehr gut übereinstimmenden Zahlen 5414×10^{-15}.

Vergleicht man die Differenzen der Abkühlungsgeschwindigkeiten mit der Formel von [Dulong und Petit, 1817a], indem man dieselben durch die entsprechenden Werte von $a^\delta - 1$ dividiert, so erhält man die Quotienten

7044, 7105, 7277,

welche wieder, wie in dem früheren Falle, für die Beobachtungen bei höherer Temperatur größer ausfallen, als für jene bei niederer.

Man kann also aus der hier durchgeführten Vergleichung das Resultat ziehen, dass den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a], welche sich auf höhere Temperaturen beziehen, beide Formeln gleich gut entsprechen, dass aber den Versuchen von [de La Provostaye und Desains, 1846], welche zum Teil bei niedrigeren Temperaturen ausgeführt sind, die von

[Dulong und Petit, 1817a] aufgestellte Formel sich weniger gut anschließt, als die neue Formel der vierten Potenzen.

1.2 Über die Bestimmung der Wärmestrahlung nach absolutem Maß.

Die absolute Größe der von einem Körper ausgestrahlten Wärmemenge kann durch Versuche nicht bestimmt werden. Versuche können nur den Überschuss der von dem Körper ausgestrahlten über die von ihm gleichzeitig absorbierte Wärmemenge geben, welch' letztere von der ihm aus der Umgebung zugestrahlten Wärme abhängig ist. Hat man jedoch eine Formel für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrahlung aufgestellt, so lässt sich mit Hilfe derselben auch ein Wert für die absolute Größe der ausgestrahlten Wärme ableiten, doch hat ein solcher nur eine hypothetische Bedeutung.

Zur Berechnung der Wärmemenge, welche ein Körper in Folge der Strahlung verliert oder gewinnt, kann man jetzt, nachdem das Wärmeleitungsvermögen der Luft bestimmt ist, die Beobachtungen über die Abkühlung oder analoge Versuche benutzen. Es hat schon [Pouillet, 1838] die Versuche von [Dulong und Petit, 1817a] zu einer solchen Berechnung verwendet; die von ihm gefundenen Zahlen sind jedoch zu groß, weil bei der Ableitung derselben der auf die Wärmeleitung der Luft entfallende Anteil an der Abkühlung nicht in Abzug gebracht ist.

Nach der Gleichung (6 auf Seite 10) ist der von der Strahlung allein verursachte Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit, wenn er mit w_1 bezeichnet wird, gegeben durch

$$w_1 = \frac{3}{r_1 cs}(H_1 - H_2)$$

Bei der Temperatur von 100° hat das Thermometer in der Hülle von 0° die Abkühlungsgeschwindigkeit 2.30. Die Korrektion wegen der Wärmeleitung ist 0.34, also bleibt $w_1 = 1.96$. Man erhält aus der vorstehenden Gleichung mit den Werten $r_1 = 3$ und $cs = 0.45$ die Größe

$$H_{100} - H_0 = 0.882,$$

als die Wärmemenge, welche von einem Quadratzentimeter Glasfläche in einer Minute bei der Temperatur von 100° mehr ausgestrahlt als von derselben Fläche in derselben Zeit von der Hülle von 0° aufgenommen wird.

Aus den Versuchen, welche [de La Provostaye und Desains, 1846] über die Abkühlung nackter und geschwärzter Thermometer ausgeführt haben, ergibt sich, dass das Emissionsvermögen des Glases 0.88 ist, wenn man das des Rußes = 1 nimmt (heute $0.95 \ldots 0.96$). Für eine berußte Fläche hätte man demnach $H_{100} - H_0 = 1$.

Speziell zu dem Zwecke, die eben berechnete Größe zu bestimmen, hat [Lehnebach, 1874] die Wärme gemessen, welche eine mit Eis gefüllte Glaskugel von einer auf 100° gehaltenen von der Kugel durch eine Luftschicht getrennten Glashülle in einer bestimmten Zeit erhielt.

[Lehnebach, 1874] fand, dass nach Abzug der durch die Leitung der Luft übergeführten Wärme, für die durch Strahlung vermittelte, der Wert 0.917 übrig bleibt, bei dessen Bestimmung dieselben Einheiten wie bei der obigen Rechnung zu Grunde gelegt wurden. Diese Zahl liegt der oben berechneten 0.882 ziemlich nahe, doch nachdem [Lehnebach, 1874] auch für den Fall, dass Kugel und Hülle geschwärzt waren, den Wert 0.916 fand, so ist es ungewiss, ob diese Zahl mit 0.882 oder mit der für eine berußte Fläche abgeleiteten, nämlich 1, zu vergleichen ist. Es kann die von [Lehnebach, 1874] angewendete Schwärzung nicht vollkommen genug gewesen sein, man kann aber das von anderen Versuchsergebnissen abweichende

Resultat auch so deuten, dass eine mit Wasser oder Eis gefüllte Glaskugel ein größeres Ausstrahlungsvermögen besitzt als eine massive Glaskugel oder als eine mit Quecksilber gefüllte. Dasselbe muss dann auch für die in Wasser eingetauchte Glashülle gelten.

Wenn man das Verhältnis des Emissionsvermögens des Silbers zu jenem des Glases und zu dem eines schwarzen Körpers kennt, so kann man auch die Differenzen der unter gleichen Umständen beobachteten Abkühlungsgeschwindigkeiten des versilberten und des nackten oder geschwärzten Thermometers zur absoluten Bestimmung der von diesem ausgestrahlten Wärmemenge benutzen. Selbst wenn das Verhältnis des Emissionsvermögens des Silbers zu den übrigen nicht genau bekannt wäre, würde der dadurch entstehende Fehler nur geringen Einfluss auf das Resultat nehmen, weil dieses Verhältnis eine kleine Zahl ist.

Für den Fall eines kugelförmigen Thermometers ist die Differenz der Abkühlungsgeschwindigkeiten durch die Gleichung

$$w_1 - w_1' = \frac{3}{r_1 cs}[(H_1 - H_2) - (H_1' - H_2')]$$

gegeben, worin w_1' und H' dasselbe für das versilberte Thermometer bedeuten, was w_1 und H für das nackte oder geschwärzte.

Wendet man zuerst die Formel von [Dulong und Petit, 1817a] an, so hat man

$$w_1 - w_1' = \frac{3}{r_1 cs}(m - m')(a^{u_1} - a^{u_2})$$

oder wenn $u_1 - u_2 = \delta$ gesetzt wird

$$\frac{w_1 - w_1'}{a^\delta - 1} = \frac{3a^{u_2}}{r_1 cs}(m - m') \tag{7}$$

Setzt man für den auf der ersten Seite dieser Gleichung stehenden Quotienten das Mittel der oben aus den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a] gefundenen Werte, nämlich 1.95, führt weiter $r_1 = 3$, $cs = 0.45$ und $a^{u_2} = 1.165$ ein, so erhält man

$$m - m' = 0.753.$$

Nimmt man an, dass letztere Zahl um 3 Prozent erhöht m gibt, so wird $m = 0.7756 \frac{\text{gCal}}{\text{Minute und cm}^2} = 540.8\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, heute $314.9\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und diese Zahl bedeutet die Wärmemenge, welche von einem Quadratzentimeter Glasfläche bei der Temperatur des schmelzenden Eises in einer Minute ausgestrahlt wird.

Um die Wärmemenge zu erhalten, welche dieselbe Fläche bei der Temperatur 100° ausstrahlt, hat man diese Zahl mit $a^{100} = 2.146$ zu multiplizieren und erhält $1.6644 \frac{\text{gCal}}{\text{Minute und cm}^2} = 1160.6\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, heute $1097.5\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Die Differenz der beiden 0.889 gibt die Wärmemenge, welche durch die Einheit der Oberfläche einer Glaskugel von 100° Temperatur in einer Glashülle von 0° per Minute abgegeben wird. Es stimmt diese Zahl mit der oben mit Zuziehung der Korrektion wegen der Wärmeleitung berechneten gut überein.

Wählt man für das Gesetz der Strahlung die Formel der vierten Potenzen der absoluten Temperaturen, so ist

$$H_1 = AT_1^4 \qquad , \qquad H_2 = AT_2^4$$

zu nehmen, worin A eine von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers abhängige Größe bedeutet.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit für die nackte Thermometerkugel ist durch

$$w_1 = \frac{3A}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

jene für die versilberte durch

$$w_1' = \frac{3A'}{r_1 cs}(T_1^4 - T_2^4)$$

gegeben. Setzt man für den Quotienten

$$\frac{w_1 - w_1'}{T_1^4 - T_2^4} = \frac{3}{r_1 cs}(A - A') \tag{8}$$

den oben gefundenen Mittelwert 135×10^{-12}, so folgt aus dieser Gleichung

$$A - A' = 6075 \times 10^{-14}$$

oder wenn man beide Seiten mit $T_0^4 = 273^4$ multipliziert

$$(A - A')T_0^4 = 0.3374.$$

Setzt man wieder voraus, dass man durch Erhöhung dieser Zahl um 3 Prozent AT_0^4 erhält, so wird

$$AT_0^4 = 0.3475 \; \frac{\text{gCal}}{\text{Minute und cm}^2} = 242.3 \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = 0.77$$

Diese Zahl bedeutet die von einem Quadratzentimeter Glasfläche bei 0° ausgestrahlte Wärmemenge und ist mehr als um die Hälfte kleiner als die mit Hilfe der von [Dulong und Petit, 1817a] aufgestellten Formel für dieselbe Größe gefundene Zahl.

Um die von der Einheit der Glasfläche bei 100° ausgestrahlte Wärmemenge nach der neuen Formel zu berechnen, hat man 0.3475 mit $\left(\frac{373}{273}\right)^4 = (1.366)^4$ zu multiplizieren. Man erhält $AT_{100}^4 = 1.2110 \; \frac{\text{gCal}}{\text{Minute und cm}^2} = 844.4 \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und somit die Größe

$$A(T_{100}^4 - T_0^4) = 0.8635,$$

etwas kleiner als nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a].

Durch Division mit 0.88 erhält man die auf eine schwarze Fläche sich beziehende Größe $H_{100} - H_0 = 1.010$ oder $= 0.981$, je nachdem man die Beobachtungen nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] oder nach der neuen Formel berechnet.

Ich will hier die Berechnung derjenigen Beobachtungen von [de La Provostaye und Desains, 1846] anschließen, welche sich auf das kugelförmige Thermometer beziehen.

Wendet man die Formel von [Dulong und Petit, 1817a] an, so hat man in die Gleichung (7 auf der vorherigen Seite) $r_1 = 1.5$, $a^{u_2} = a^{14.7} = 1.1194$ einzusetzen. Der Mittelwert der Zahlen

$$0.07044, \; 0.07105, \; 0.07277,$$

nämlich 0.07142 durch Multiplikation mit 60 auf die Minute als Einheit reduziert, gibt 4.2852 und diese Zahl ist für einzustellen. Es ergibt sich dann

$$m - m' = 0.862,$$

worin m für eine schwarze Fläche gilt. Nimmt man $m' = \frac{m}{40}$, so wird $m = 0.833$ und endlich

$$H_{100} - H_0 = 1.012.$$

Von der neuen Formel Gebrauch machend, hat man in der Gleichung (8 auf der vorherigen Seite)

$$\frac{w_1 - w_1'}{T_1^4 - T_2^4} = 5414.60 \times 10^{-15}$$

zu setzen und erhält

$$A - A' = 7313 \times 10^{-14}$$
$$(A - A')T_0^4 = 0.4062$$

und unter der Voraussetzung, dass $A' = \frac{A}{40}$,

$$AT_0^4 = 0.4163$$

und endlich

$$A(T_{100}^4 - T_0^4) = H_{100} - H_0 = 1.0367.$$

Die aus diesen Versuchen abgeleiteten Zahlen stimmen sehr gut mit den früheren aus den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten überein.

Hingegen liefert die Berechnung der mit dem zylindrischen Thermometer ausgeführten Beobachtungen bedeutend abweichende Werte.

Der von der Strahlung allein abhängige Teil der Abkühlungsgeschwindigkeit eines Zylinders ist bestimmt durch die Gleichung

$$pcw_1 = 2\pi r_1(r_1 + h)(H_1 - H_2),$$

wenn r_1 den Radius, h die Höhe des Zylinders bedeutet. Zur Bestimmung von pc will ich unmittelbar die von [de La Provostaye und Desains, 1846] gemachte Angabe benutzen, dass das Thermometer 300 gr Quecksilber fasste, welche Angabe auch mit den Dimensionen des Zylinders stimmt. Es ist demnach $pc = 9.96$ und setzt man noch $r_1 = 1$ und $h = 7$, so reduziert sich obige Gleichung auf

$$0.1982 w_1 = H_1 - H_2,$$

Man erhält nun nach der neuen Formel rechnend die Gleichung

$$0.1982 \frac{w_1 - w_1'}{T_1^4 - T_2^4} = A - A'$$

und wenn man

$$\frac{w_1 - w_1'}{T_1^4 - T_2^4} = 4624.60 \times 10^{-15}$$

einführt,

$$A - A' = 5499 \times 10^{-14}$$

$$(A - A')T_0^4 = 0.3054$$

Nach Erhöhung dieser Zahl um 3 Prozent folgt

$$AT_0^4 = 0.3416$$

und endlich

$$H_{100} - H_0 = 0.7818.$$

unter Anwendung der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] erhält man für $H_{100} - H_0$ den etwas größeren Wert 0.7961, für die Konstante $m - m'$ den Wert 0.6745. Reduziert man die gefundenen Zahlen durch Division mit 0.88 auf den Fall einer berußten Fläche, so erhält man $H_{100} - H_0 = 0.888$ oder $= 0.905$ je nachdem man die neue Formel oder die von [Dulong und Petit, 1817a] zur Berechnung der Beobachtungen verwendet.

Die aus diesen Versuchen abgeleiteten Werte sind beträchtlich kleiner, als die aus den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a] berechneten. Letztere würden eine kleine Verminderung erfahren, wenn die ihnen zu Grunde liegenden Beobachtungen wegen des Eintrittes des kalten Quecksilbers korrigiert würden, welche Korrektur an den von [de La Provostaye und Desains, 1846] mitgeteilten Zahlen angebracht ist. Der Einfluss der Thermometerröhre auf die Abkühlung fällt bei der Subtraktion der Abkühlungsgeschwindigkeiten des versilberten Thermometers von jenen des nackten bei den Versuchen von [de La Provostaye und Desains, 1846] nicht weg, weil bei diesen auch die Röhre versilbert war. Es wäre leicht, mit Hilfe anderer Beobachtungseihen, diesen Fehler zu korrigieren. Ich habe es unterlassen, weil durch die Vernachlässigung der Wärmekapazität des Glases bei der Berechnung von pc wieder ein Fehler, der von entgegengesetztem Einfluss auf das Resultat ist, begangen werden musste. Ein anderer, nicht in bestimmender Fehler liegt endlich noch in der Berechnung der Oberfläche des Thermometers, das wohl kein Zylinder im geometrischen Sinne war.

Es haben übrigens [de La Provostaye und Desains, 1846] die Abkühlung desselben Thermometers auch in einem großen kugelförmigen Ballon von 24 cm Durchmesser bei dem Drucke von 6 Torr beobachtet und sie führen als Unterschiede der Abkühlungsgeschwindigkeiten des nackten und des versilberten Thermometers für die Temperaturdifferenzen

$$60.4°, 93.9°, 107.184°, 121.884°$$

die Zahlen

$$0.0376, 0.06828, 0.08297, 0.10120$$

an, welche mit den in der obigen Tabelle stehenden verglichen, durchwegs um drei Prozent größer erscheinen. [de La Provostaye und Desains, 1846] erklären diesen Umstand durch die verschiedene Schwärze des kugelförmigen und des zylindrischen Ballons und geben an, dass eine so gute Übereinstimmung erst nach einer neuen Schwärzung des Zylinders erzielt wurde, während bei anderen Versuchen die Differenzen dreimal größer waren.

Da nach den Grundlehren der Wärmestrahlung für die Geschwindigkeit der Abkühlung eines Körpers in einer Hülle das kleinere der Emissionsvermögen von den beiden maßgebend ist, so müsste in diesem Falle die geschwärzte Hülle ein kleineres Emissionsvermögen gehabt haben, als der Glaszylinder des Thermometers.

Die Abkühlungsversuche von [Dulong und Petit, 1817a], von [de La Provostaye und Desains, 1846] sind nicht die einzigen, welche zur Berechnung der Wärmestrahlung dienen können. Ich will hier noch einige von [Despretz, 1817] über die Abkühlung von Metallkugeln gemachten Beobachtungen verwenden. [Despretz, 1817] bestimmte die Zeiten, welche ein in die Mitte der Kugeln eingeführtes Thermometer brauchte, um von 105° auf 95° zu sinken, wenn die zuerst erwärmten Kugeln in einem großen Raume von 19° sich abkühlten und zwar war die Oberfläche der Kugeln entweder poliert oder geschwärzt. Die Kugeln waren von gleichem Durchmesser, welcher 67 mm betrug.

Die Abkühlungszeiten waren für die Kugel von

Eisen	340"	596"
Messing	285	521
Zink	265	473
Zinn	157	277

und zwar beziehen sich, wie es sich von selbst versteht, die kleineren Zeiten auf die geschwärzten, die größeren auf die polierten Kugeln. Annähernd kann man die Quotienten aus 10 und diesen Zeiten als die Abkühlungsgeschwindigkeiten betrachten, welche der Temperatur 100° entsprechen und zunächst für den Fall der eisernen Kugel die Gleichung ansetzen:

$$\frac{r_1 cs}{3}\left(\frac{10}{340}-\frac{10}{596}\right)=(H_{100}-H_{19})-(H'_{100}-H'_{19})$$

worin, analog den früher gebrauchten Bezeichnungen, H das Emissionsvermögen der geschwärzten, H' jenes der polierten Kugel bedeutet. Setzt man in diese Formel $r_1 = 3.35$, $c = 0.1138$, $s = 7.788$, so erhält man

$$(H_{100}-H_{19})-(H'_{100}-H'_{19})=0.7504$$

und wenn man das Emissionsvermögen des polierten Eisens = 0.23 annimmt

$$H_{100}-H_{19}=0.974.$$

Reduziert man diese Zahl nach der Formel der vierten Potenzen auf die Strahlung zwischen den Temperaturen 100° und 0°, so erhält man

$$H_{100}-H_0=1.112.$$

Behandelt man in derselben Weise die übrigen Beobachtungen und setzt für so gewinnt

	c =	s =
Messing	0.0935	8.111
Zink	0.0956	7.146
Zinn	0.0559	7.395

man für die Differenz $(H_{100}-H_{19})-(H'100-H'19)$ der Reihe nach die Werte

0.808, 0.760, 0.764

Die Emissionsvermögen dieser drei Metalle = 0.09, 0.19, 0.14 nehmend, erhält man

$$H_{100}-H_{19}=0.888,\ 0.938,\ 0.889$$

und daraus wieder

$$H_{100}-H_0=1.014, 1.071, 1.015$$

welche drei Zahlen mit den aus den Beobachtungen über die Abkühlung der kugelförmigen Thermometer berechneten sehr gut übereinstimmen. Es lieferten nämlich, um die für die Größe $H_{100} - H_0$ gefundenen Werte hier zusammenzufassen, die Versuche von [Dulong und Petit, 1817a] die Werte 1.002 und 0.981, von denen der erste aus einer direkten Beobachtung der Abkühlung, der zweite aus den Differenzbeobachtungen berechnet. Die von [de La Provostaye und Desains, 1846] mit dem kuge1förmigen Thermometer gemachten Versuche ergaben $H_{100} - H_0 = 1.037$.

Trotz der guten Übereinstimmung zwischen diesen Werten, ist doch bei dem Umstand, dass die Beobachtungen mit dem zylindrischen Thermometer um 10 Prozent niedrige Zahlen (0.888 und 0.915) liefern und auch die Versuche von [Lehnebach, 1874] nicht sicher gedeutet werden können, schwer, eine Entscheidung zu treffen, ob die größeren oder kleineren Werte die genaueren sind. Zunächst kann man als angenähert richtig die Einheit der Wärmemenge als diejenige Wärme betrachten, welche ein Quadratzentimeter einer schwarzen Fläche bei 100° mehr ausstrahlt, als bei 0°.

Es ist noch zu bemerken, dass man für die Differenz $H_{100} - H_0$ auch aus solchen Beobachtungen, welche nicht unmittelbar den Temperaturen 100° und 0° entsprechen, nahezu dieselben Werte erhält, ob man die Beobachtungen nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] oder nach der neuen Formel berechnet. Für die einzelnen Größen H_{100} und H_0 ergeben sich aber nach den beiden Formeln ganz verschiedene Werte. Nimmt man $H_{100} - H_0 = 1$, so folgt aus dem Gesetze von [Dulong und Petit, 1817a] $H_0 = 0.87$, aus dem Gesetze der vierten Potenzen hingegen $H_0 = 0.40$. Wie schon bemerkt worden, haben letztere Zahlen zunächst nur eine hypothetische Bedeutung und ist eine Prüfung derselben nicht möglich, so lange nicht Ausstrahlungen gegen Körper von der absoluten Temperatur Null oder wenigstens von einer sehr niedrigen Temperatur gemessen sind. Ein derartiger Strahlungsvorgang findet tatsächlich zwischen der Erde und dem Weltraum statt und man kann eine untere Grenze für den Wert H_0 gewinnen, wenn man die Wärmemenge, welche die Erde von der Sonne empfängt mit derjenigen vergleicht, welche sie in den Weltraum abgeben muss, damit der Zustand, in welchem sie sich gegenwärtig befindet, herbeigeführt wird. Ich kann jedoch gegenwärtig auf diese Aufgabe, welche mit der Frage nach der sogenannten Temperatur des Weltraumes zusammenfällt, nicht eingehen, nur so viel will ich bemerken, dass nach der neuen Formel die Größe der Erde aus dem Weltraum zugestrahlten Wärme viel kleiner ausfallen muss, als sie von [Pouillet, 1838] aus der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] berechnet wurde, nach welcher Berechnung sie 5/6 derjenigen ausmachen soll, welche die Erde von der Sonne empfängt.

1.3 Über die Versuche von [Draper, 1847] und [Ericsson, 1875].

Die Annahme, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional ist, liefert auch noch für sehr hohe Temperaturen Resultate, welche den Beobachtungen ziemlich gut entsprechen, während die Formel von [Dulong und Petit, 1817a] in solchen Fällen ganz Widersinniges gibt. Beobachtungen über die Wärmestrahlung bei hohen Temperaturen liegen übrigens nur wenige vor und sind ihre Ergebnisse, namentlich was die Bestimmung der Temperaturen betrifft, sehr unsicher, so dass sie zu einer entscheidenden Prüfung einer Hypothese wohl nicht geeignet sind.

Zuerst will ich hier die Bemerkung anführen, welche [Wüllner, 1872] in seinem Lehrbuch an die Mitteilung der Tyndall'schen Versuche über die Strahlung eines durch einen elektrischen Strom zum Glühen gebrachten Platindrahtes anknüpft, weil diese Bemerkung mich zuerst veranlasste, die Wärmestrahlung der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional anzunehmen.

Von der schwachen Rotglut (etwa 525°) bis nur vollen Weißglut (etwa 1200°) nahm die Intensität der Strahlung von 10.4 bis 122, also fast um das Zwölffache (genauer 11.7), zu. Das Verhältnis der absoluten Temperaturen 273 + 1200 und 273 + 525 gibt in der vierten Potenz 11.6.

Eine ausgedehnte Reihe von relativen Messungen der Wärmestrahlung eines galvanisch erwärmten Platindrahtes hat schon im Jahre 1847 [Draper, 1847] ausgeführt und dieselben zugleich mit Temperaturbestimmungen verbunden. Zu den letzteren wurde allerdings kein ganz bestimmtes Maß, heimlich die Ausdehnung des Platindrahtes benützt.

Die folgende Tabelle enthält die von [Draper, 1847, p. 44] in zwei Versuchsreihen (I und II) gefundenen Resultate.

Die Tabelle in [Draper, 1878, p. 44] scheint gleich zu sein der Tabelle in [Draper, 1847, p. 44]. Harper hat die Temperaturen in F angegeben, offensichtlich hat [Stefan, 1879] diese Temperaturen mit $(F + 459.4) * 5/9$ und Runden in Grad K umgerechnet.

Absolute Temp. des Drahtes		Intensität der Wärmestrahlung		
F	K	I.	II.	Mittel
980	800	0.75	1.00	0.87
1095	864	1.00	1.20	1.10
1210	927	1.40	1.60	1.50
1325	991	1.60	2.00	1.80
1440	1055	2.20	2.20	2.20
1555	1119	2.75	2.85	2.80
1670	1183	3.65	3.75	3.70
1785	1247	5.00	5.00	5.00
1900	1311	6.70	6.90	6.80
2015	1375	8.60	8.60	8.60
2130	1439	10.00	10.00	10.00
2245	1502	12.50	12.50	12.50
2360	1566	15.50	15.50	15.50

Dividiert man die in der letzten Reihe stehenden Mittelwerte durch die vierten Potenzen der zugehörigen absoluten Temperaturen, so erhält man der Reihe nach die Quotienten 21, 20, 20, 19, 18, 19, 21, 23, 24, 23, 25, 25. Diese gehen wohl sehr weit aus einander, bei der geringen Genauigkeit der Beobachtungen fallen jedoch diese Divergenzen nicht sehr schwer ins Gewicht. Um wie viel besser sich die neue Formel den Beobachtungen anschließt, als die von [Dulong und Petit, 1817a] aufgestellte kann man aus folgenden Daten ersehen. Nach der neuen Formel verhalten sich die bei den absoluten Temperaturen 800, 1200, 1600 ausgestrahlten Wärmemengen wie 1:5:16 und diese Verhältnisse treten auch im Groben aus der obigen Tabelle hervor. Nach der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] hingegen verhalten sich die in Rede stehenden Wärmemengen wie 1:21.5:462.2.

[Ericsson, 1875] hat sehr viele Versuche über die Wärmestrahlung bei hohen Temperaturen in der speziellen Absicht ausgeführt, das Gesetz von [Dulong und Petit, 1817a] zu widerlegen. Die Resultate der Versuche hat er jedoch nicht genau diskutiert. Ich will im Folgenden nur eine der Versuchsreihen, welche ihrer Anordnung nach wohl die originellste ist, eingehender behandeln. Dieselben Betrachtungen würden sich auch auf die anderen anwenden lassen.

[Ericsson, 1875] setzte auf einen großen, bis zum Weißglühen erhitzten Eisenblock ein mit kurzen Füßen versehenes Kalorimeter und bestimmte die Wärmemengen, welche der Block bei sukzessive abnehmenden Temperaturen an das Kalorimeter per Minute abgab.

Die folgende Tabelle enthält die für bestimmte Temperaturdifferenzen des Blocks gegen das Kalorimeter berechneten Wärmeabgaben des ersteren. Als Einheit der Wärmemenge ist jene angenommen, welche 1 Kilogr. Wasser bei der Erhöhung der Temperatur um 1 °C aufnimmt. Die in der Tabelle aufgeführten Wärmemengen entsprechen nicht direkt den beobachteten. Die letzteren wurden durch den Inhalt der Bodenfläche dividiert und die Quotienten sind in die Tabelle eingesetzt, so dass diese die auf einen Quadratfuß der Bodenfläche bezogenen Wärmeaufnahmen enthält. Die Temperatur der umgebenden Luft, sowie die Anfangstemperatur des Kalorimeters war 15°.

Die Tabelle ist aus [Ericsson, 1875, p. 49], genommen.

100°	3.1	900°	62.3
200	6.5	1000	78.7
300	10.2	1100	98.2
400	14.8	1200	120.5
500	20.5	1300	146.0
600	27.9	1400	174.8
700	37.2	1500	206.9
800	48.5	1600	242.9

Die von dem Eisenblock an das Kalorimeter abgegebene Wärmemenge ist somit bei einer Temperaturdifferenz von 1600° etwa 80 mal größer als bei der Differenz von 100°. Würde die Wärmemitteilung nur durch die Strahlung erfolgen, wie [Ericsson, 1875] voraussetzt, so wäre durch diese Versuche nicht nur das Gesetz von [Dulong und Petit, 1817a], nach welchen das Endglied obiger Tabelle 177 000 mal größer sein sollte als das erste, widerlegt, sondern auch die Formel der vierten Potenzen, welche für dieses Verhältnis wohl eine viel mäßigere Zahl, nämlich 805 gibt; doch ist diese noch 10 mal größer als die den Daten der Tabelle entsprechende.

Die Annahme, dass das Kalorimeter von dem Eisenblocke die Wärme durch Strahlung allein erhält, ist jedoch eine unrichtige, einen Teil der Wärme erhält das Kalorimeter auch durch Leitung und zwar ist dieser Teil bei den niedrigeren Temperaturen der bei weitem größere. Der Beweis für diese Behauptung lässt sich aus den Versuchsdaten selbst führen.

Die Wärmemenge 3.1, welche das Kalorimeter bei 100° Temperaturdifferenz in einer Minute empfängt, ist für einen Quadratfuß strahlende Fläche berechnet. Dieselbe wird durch Division mit 929 auf ein Quadratzentimeter reduziert und wenn man den Quotienten noch mit 1000 multipliziert, also das Gramm als Gewichtseinheit einführt, so erhält man die Zahl 3.34. Nach den im vorhergehenden Abschnitte aufgeführten Berechnungen kann man 1 als diejenige Wärmemenge annehmen, welche ein Quadratzentimeter einer schwarzen Fläche bei 100° gegen eine gleichartige Fläche von 0° durch Strahlung verliert. Wird die Temperatur der ersteren auf 115°, die der letzteren auf 15° erhöht, so steigt die ausgestrahlte Wärmemenge nahezu im Verhältnis von 8 zu 7, kann also = 1.14 gesetzt werden.

Diese Wärmemenge könnte vom Eisenblock dem Kalorimeter zugestrahlt werden, wenn das Emissionsvermögen des Eisens jenem des Rußes gleich käme und selbst diese Wärmemenge ist mehr als dreimal kleiner, als die aus den Beobachtungen abgeleitete 3.34. Nimmt man das Ausstrahlungsvermögen des Eisens 1/4 von jenem des Rußes, so erhält man für die durch Strahlung an das Kalorimeter abgegebene Wärme nur 0.29, also nur gleich dem zwölften Teile der beobachteten, 11 Teile von dieser kommen auf Rechnung der Leitung. Letztere findet zum Teile durch die zwischen dem Block und dem Kalorimeter befindliche Luftschicht statt, zum größeren Teile aber durch die Füße des Kalorimeters. Es hätten die Versuche auch ganz andere und leichter zu diskutierende Resultate ergeben, wenn [Ericsson, 1875] das

Kalorimeter nicht auf den Block aufgesetzt, sondern über demselben an Schnüren aufgehängt und in der Luft schwebend gehalten hätte.

Zu einer Schätzung der bei diesen Versuchen auftretenden Wirkung der Strahlung kann man noch auf eine zweite Art gelangen. Wenn man nach der Formel der vierten Potenzen das Verhältnis der Wärmemengen berechnet, welche von einem Körper bei den Temperaturen 215° und 115° einem anderen von 15° zugestrahlt werden, so findet man dasselbe = 3.16. Die beiden in der Tabelle von [Ericsson, 1875] stehenden Zahlen 3.1 und 6.5 geben einen viel kleineren Quotienten, weil dieselben neben der Wirkung der Strahlung auch noch jene der Leitung darstellen, welche viel langsamer mit der Temperatur steigt als erstere. Man kann dieselbe in erster Annäherung geradezu der Temperaturdifferenz proportional setzen und annehmen, dass die an der Zahl 6.5 wegen der Wärmeleitung vorzunehmende Korrektion $2x$ beträgt, wenn die an der Zahl 3.1 anzubringende Korrektion x ist. Man kann nun die Forderung, dass

$$\frac{6.5-2x}{3.1-x}=3.16$$

sein soll, zur Bestimmung von x benutzen und erhält $x = 2.84$. Diese Zahl von 3.1 subtrahiert, gibt 0.26 als Maß für die Strahlung, und stimmt diese Größe mit der früheren, welche unter der Annahme, dass das Emissionsvermögen des Eisens = $1/4$ ist, gefunden wurde, nahe überein. Ihr liegt wohl eine etwas kleinere, doch nur im Verhältnis von 929:1000 kleinere Einheit zu Grunde als der früheren.

Wie schon bemerkt, wächst der Effekt der Wärmeleitung mit steigender Temperatur viel langsamer als jener der Strahlung. Da es sich hier hauptsächlich um die Leitung durch einen festen Körper handelt, so wird bei gleichbleibenden äußeren Bedingungen die Wärmeleitung noch langsamer als die Temperaturdifferenz zunehmen. Es wird also bei der Temperaturdifferenz von 1600° die Wärmeleitung wahrscheinlich nicht 16 mal so viel betragen als bei der Differenz von 100°, sondern weniger. Nimmt man die für x gefundene Zahl 2.84 an, so ist der 16 fache Betrag derselben 45.4. Es wird demnach von der für die Temperaturdifferenz von 1600° beobachteten Wärmemenge 242.9 mach der Korrektion wegen der Wärmeleitung eine in der Nähe von 200 liegende Zahl übrig bleiben, während für die Differenz von 100° die Zahl $1/4$ als Maß der Strahlung betrachtet werden kann. Diese beiden Werte entsprechen sehr genau dem von der Formel der vierten Potenzen geforderten Verhältnisse von 805:1.

Man gelangt also auch durch die Diskussion der Versuche von [Ericsson, 1875] zu dem Resultate, dass die neue Formel zur Beurteilung der Größe der Wärmestrahlung bei höheren Temperaturen sehr brauchbar ist.

1.4 Über die Temperatur der Sonne.

Ich will hier noch die Zahlen zusammenstellen, welche für die Temperatur der Sonne nach den verschiedenen Formeln erhalten werden können.

[Pouillet, 1838] hat aus seinen aktinometrischen Beobachtungen berechnet, dass ein Quadratzentimeter der Oberfläche der Sonne in jeder Minute 84 888 Wärmeeinheiten aussendet. Aus dieser Zahl hat er mit Hilfe der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] für die Temperatur der Sonne die zwei Werte 1461° und 1761° abgeleitet, indem er das Emissionsvermögen der Sonne zuerst = 1, das andere mal aber = 0.1 annahm. Nimmt man die Konstante m der Formel von [Dulong und Petit, 1817a] = 0.87, welcher Wert auch den Versuchen von [Dulong und Petit, 1817a], wenn dieselben wegen der Wärmeleitung der Luft korrigiert werden, entspricht, so erhält man für die Temperatur der Sonne etwas größere Zahlen (1497° und 1797°) und dieselben würden sich noch etwas erhöhen, wenn man die neueren Beobachtungen benützte, nach welchen die Sonnenwärme viel größer ist, als [Pouillet, 1838] sie fand. Nach den Bestimmungen von [Violle, 1875] ist dieselbe 1.44 mal größer, und dem entsprechend wachsen die Zahlen für die Temperatur der Sonne auf 1544° und 1844°, und wenn man das Emissionsvermögen derselben dem des Silbers, also = 1/40 annimmt, erhält man die Zahl 2025°.

Nimmt man dagegen die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional an und setzt die von einem Quadratzentimeter einer schwarzen Fläche bei 0° in der Minute ausgesendete Wärmemenge $= 0.4\,\frac{\text{gCal}}{\text{Minute und cm}^2} = 290\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, heute $315\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, so erhält man aus der von [Pouillet, 1838] für die Sonnenwärme gegebenen Zahl für die Temperatur der Sonne den Wert 5586°, wenn man ihr Emissionsvermögen = 1, und den Wert 10 147°, wenn man dasselbe = 0.1 setzt. Benützt man die von [Violle, 1875] angegebene Größe der Sonnenwärme, so erhöhen sich die eben angegebenen Werte um 10 Prozent.

[Soret, 1872] beobachtete die Temperaturerhöhungen, welche das Thermometer seines Aktinometers unter der Wirkung der Sonnenstrahlen und unter der Wirkung einer in der Flamme der Leuchtgas-Sauerstofflampe erhitzten Scheibe von Zirkon oder Magnesia erhielt, wobei die Scheibe vom Thermometer aus gesehen dieselbe scheinbare Größe hatte als die Sonne. Die Temperaturerhöhungen waren in den zwei Fällen 14.5° und 0.5, verhielten sich also wie 29:1. Nimmt man an, dass die Wärmeabgaben des Thermometers, wie die Überschüsse seiner Temperaturen über die der Umgebung sich verhalten, so folgt, dass das Thermometer von der Sonne 29 mal so viel Wärme erhielt als von der Zirkonscheibe und es würde etwa $29 * 3/2 = 43.5$ mal so viel von der Sonne erhalten haben, wenn in der Atmosphäre keine Wärme absorbiert würde. Nimmt man für die Sonne und die Zirkonscheibe das gleiche Emissionsvermögen an, so muss die absolute Temperatur der Sonne $\sqrt[4]{43.5} = 2.568$ mal höher sein als jene der Scheibe. Letztere liegt nach der Schätzung von [Soret, 1872] zwischen 2173° und 2273°, demnach jene der Sonne zwischen 5580° und 5838°, oder nach der gewöhnlichen Skala gemessen liegt die Temperatur der Sonne unter der über ihr Emissionsvermögen gemachten Annahme zwischen 5307° und 5565°. Diese Zahlen liegen sehr nahe dem unteren Grenzwerte, welcher aus Beobachtungen von [Pouillet, 1838] berechnet wurde.

Die ersten Schätzungen der Temperatur der Sonne wurden auf Grund der Newton'schen Formel gemacht, nach welcher die Wärmestrahlung eines Körpers mit seiner Temperatur in geradem Verhältnisse steigt. Da die von der Einheit einer schwarzen Fläche bei 100° in der Minute ausgesendete Wärmemenge um 1 großer ist als die bei 0° ausgesendete, so gibt unter Anwendung der Newton'schen Formel die von [Pouillet, 1838] für die von der Sonne ausgestrahlte Wärmemenge gegebene Zahl mit 100 multipliziert die Temperatur der Sonne. Diese wird also = 8 488 800, wenn das Emissionsvermögen der Sonne = 1, sie wird 10 mal so groß, wenn letztere = 0.1 gesetzt wird. Man hat sonst unter Anwendung derselben Formel aus den Temperaturerhöhungen bestrahlter schwarzer Thermometer kleinere Werte für die Temperatur der Sonne gefunden, jedoch nur unter der ganz unrichtigen Annahme, dass das Thermometer nur durch Strahlung Wärme an die Umgebung abgeben.

Zum Schluss muss ich hier noch anführen, dass in neuester Zeit [Rossetti, 1878] eine Untersuchung über die Wärmestrahlung bei höheren Temperaturen und über die Temperatur der Sonne ausgeführt hat. Er hat auch zur Berechnung seiner Versuche eine Formel angewendet, in welcher die Wärmestrahlung eines Körpers mit seiner absoluten Temperatur in algebraischem Zusammenhang erscheint. Die Ablenkung y des mit einer bestrahlten Thermosäule verbundenen Galvanometers wird ausgedrückt durch die Formel

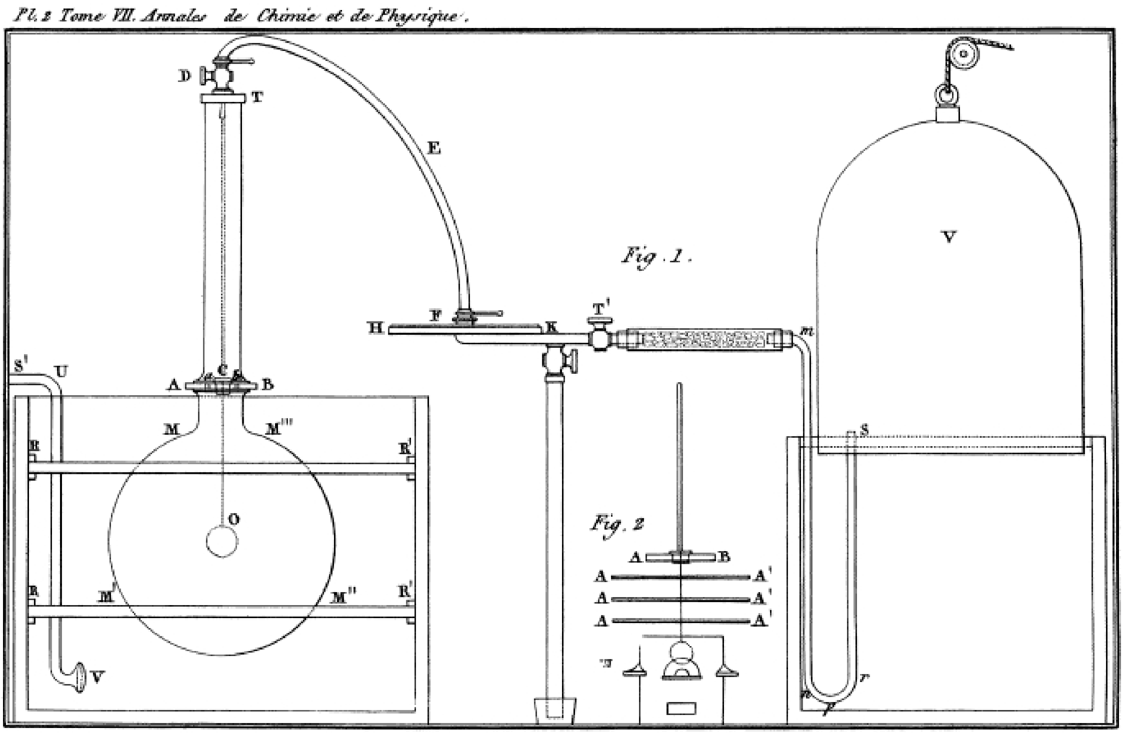
$$y = (aT^2 - b)(T - \theta)$$

worin a und b Konstanten, T die absolute Temperatur des strahlenden Körpers, θ jene der Umgebung bedeuten. Diese Formel soll auch das Ergebnis theoretischer Betrachtungen sein. Die Abhandlung selbst habe ich noch nicht einsehen können, in den nur bekannt gewordenen Auszügen sind diese Betrachtungen nicht mitgeteilt, ebenso auch nicht die Beobachtungen über die Strahlung bei höheren Temperaturen, so dass ich die Frage, ob die von mir aufgestellte Formel auch zur Darstellung dieser Beobachtungen geeignet sei, nicht behandeln kann.

Bezüglich der Sonnentemperatur sei bemerkt, dass von [Rossetti, 1878] für die untere Grenze derselben der Wert 9965.4° angegeben wird.

2 Bemerkungen zu Stefans Originalarbeit

Zunächst einige Bemerkungen zu den Grundlagen des Papers von [Stefan, 1879]. Nach seinem Text hat Stefan selbst zwar Messungen gemacht, aber seine Messergebnisse nicht angegeben. Seine Schlußfolgerungen zieht er aus den Ergebnissen der Experimente vieler anderer. Die ausgewerteten Versuche wurden von [Dulong und Petit, 1817a]) und später publiziert - aber eben alle vor 1879. Den Versuchsaufbau von [Dulong und Petit, 1817a] zeigt Diagramm 1.

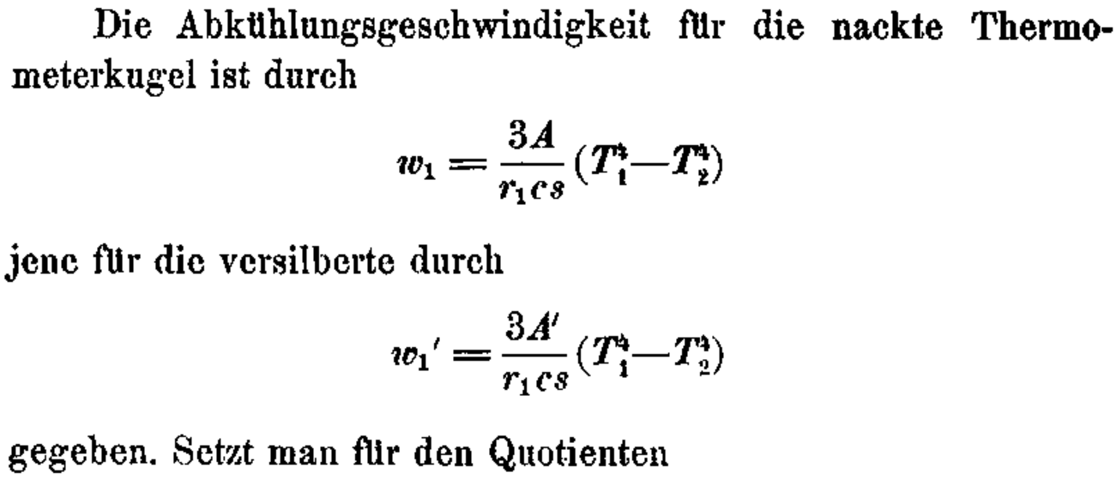


Diagr. 1: [Dulong und Petit, 1817a] Versuchsaufbau - Links ist die eigentliche Meßanodnung mit einer warmen Kugel in der Mitte (Temperatur T_1) und der Umhüllung mit einer einheitlichen Temperatur T_2. Der rechte Teil dient der Evakuierung.

Alle Versuchsergebnisse zur Strahlungsmessung sind unvermeidbar durch Effekte der Wärmeleitung teilweise verfälscht. Diese Störungen müssen herausgerechnet werden, damit die Strahlungsdaten unverfälscht gewonnen werden können. In der Zeit zwischen [Dulong und Petit, 1817a] und [Stefan, 1879] hatte sich weiteres Wissen über Wärmeleitung angehäuft. Deswegen hat Stefan die früheren Versuchsergebnisse mit den neueren Erkenntnissen korrigiert. Zu Stefans Zeiten wurden zwei Wärmeleitungsvorgänge klar unterschieden: die Wärmeleitung durch Konvektion eines strömenden Gases und die Wärmeleitung durch ein ruhendes Gas. [Dulong und Petit, 1817a] hatten nach dem Kenntnisstand 1817 die Meßergebnisse nur entsprechend dem vermuteten Strömungseinfluß korrigiert. Für ein ruhendes Gas nimmt [Stefan, 1879] die Wärmeleitung als druckunabhängig an.

> **Anmerkung 1:** Heute wissen wir, daß die Wärmeleitung eines ruhenden Gases nur so lange druckunabhängig ist, wie die freie Weglänge der Gasteilchen klein gegen die Abmessungen der Versuchsanordnung ist. Wird die freie Weglänge groß gegen die Abmessungen der Versuchsanordnung wird die Wärmeleitung druckabhängig. Derartig gute Vakua waren damals nicht (?) herstellbar und waren mit Sicherheit bei den Wärmetransportmessungen nicht verwendet worden.

Nach Durchführung der Wärmeleitungskorrekturen fand [Stefan, 1879], daß jeder Strahlungstransport durch folgende Gleichung (in moderner Schreibweise: ε Absorptionskoeffizient, σ Stefan-Boltzmann-Konstante) beschrieben werden kann (siehe Faksimile Diagramm 2 von Seite 414):



Die Abkühlungsgeschwindigkeit für die nackte Thermometerkugel ist durch

$$w_1 = \frac{3A}{r_1 c s}(T_1^4 - T_2^4)$$

jene für die versilberte durch

$$w_1' = \frac{3A'}{r_1 c s}(T_1^4 - T_2^4)$$

gegeben. Setzt man für den Quotienten

Diagr. 2: Auszug aus dem Paper [Stefan, 1879, S. 414]

$$N = \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{9}$$

Für das heutige N verwendet [Stefan, 1879] die Bezeichnung W und für die Temperatur sowohl die Formelbuchstaben u als auch T. Da damals Wärmeleistungen nicht so einfach wie heute bestimmbar waren, verwendet [Stefan, 1879] nicht die Wärmeleistung direkt, sondern die Abkühlgeschwindigkeit w, dem Quotienten aus Wärmeabfluß N und dem Wärmekapazität der Kugel, da bei vergleichbaren Kugeln auch der Wärmeinhalt gleich ist (siehe Faksimile Diagramm 3 auf der nächsten Seite von Seite 397):

$$w = \frac{N}{\text{Wärmekapazität}} \tag{10}$$

Die Wärmekapazität ergibt sich aus dem Produkt von Masse (von [Stefan, 1879] als »Gewicht« bezeichnet) und spezifischer Wärme.

> **Anmerkung 2:** Damals standen noch keine Möglichkeiten für eine direkte Wärmestrommessung zur Verfügung. Deswegen bezieht sich [Stefan, 1879] immer

Bedeutet u_1 die Temperatur des Thermometers zur Zeit t, $-du_1$ die Änderung von u_1 in der Zeit dt, so entspricht dieser die Wärmemenge $-pcdu_1$ oder pcv_1dt, wenn mit p das Gewicht, mit c die specifische Wärme des Thermometers bezeichnet und die Abkühlungsgeschwindigkeit $-\frac{du_1}{dt} = v_1$ gesetzt wird.

Diagr. 3: Auszug aus dem Paper [Stefan, 1879, S. 397]

auf instationäre Messungen, bei denen Wärmestrom als proportional zur zeitlichen Temperaturänderung angenommen wird. Bei einer modernen Durchführung der Experimente würde man stationär arbeiten, d.h. die innere Kugel z.B. elektrisch heizen. Dabei kann heute die Heizleistung genau gemessen werden.

Allgemein betrachtet [Stefan, 1879] eine Wärmegröße $f(u)$, die er in seiner Arbeit später als $f(u) = T^4$ für Strahlung spezifiziert.

2.1 Gegenstrahlung

Ganz allgemein kann nach [Stefan, 1879] (auf Seite 400 - Faksimile Diagramm 7 auf der nächsten Seite) jeder Wärmestrom als Differenz zweier Wärmeströme beschrieben werden, wobei jeder der beiden Teilwärmeströme als unabhängig von der zweiten Temperatur angenommen wird. Der Wärmestrom vom kühleren zum wärmeren Körper wird heute meistens als Gegenstrahlung bezeichnet, weil seine Ausbreitungsrichtung dem Gesamtwärmestrom entgegen gesetzt gerichtet ist.

Wichtiger ist es, zu bemerken, dass W als Differenz zweier von u_1 und u_2 abhängiger Grössen erscheint, und dass man für W immer einen Ausdruck von der Form

$$W = f(u_1) - f(u_2)$$

erhält, welcher Art auch die Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der Temperatur sein mag. Man kann also auch den durch die Leitung der Luft bedingten Wärmeverlust der inneren Kugel betrachten als das Resultat von zwei Wärmeströmen, von denen der eine von der Kugel zur äusseren Hülle, der zweite in umgekehrter Richtung vor sich geht, jeder unabhängig von dem anderen. Es verhält sich also der Wärmeaustausch durch Leitung analog jenem, welcher zwischen verschieden warmen Körpern durch Strahlung vermittelt wird. Die von Dulong und Petit

Diagr. 4: Auszug aus dem Paper [Stefan, 1879, S. 400]

Zur Erläuterung des Textes von [Stefan, 1879] hinsichtlich Gegenstrahlung, wird die Reihenfolge von zwei Sätzen umgestellt:

> Es verhält sich also der Wärmeaustausch durch Leitung analog jenem, welcher zwischen verschieden warmen Körpern durch Strahlung vermittelt wird. ... Man kann also auch den durch die Leitung der Luft bedingten Wärmeverlust der inneren Kugel betrachten als das Resultat von zwei Wärmeströmen, von denen der eine von der Kugel zur äußeren Hülle, der zweite in umgekehrter Richtung vor sich geht, jeder unabhängig von dem anderen.

Weiter schreibt [Stefan, 1879]:

als die Wärmemenge, welche von einem Quadratcentimeter Glasfläche in einer Minute bei der Temperatur von 100° mehr ausgestrahlt als von derselben Fläche in derselben Zeit von der Hülle von 0° aufgenommen wird.

Diagr. 5: Auszug aus dem Paper [Stefan, 1879, S. 411/412]

Bei den ersten Gegenstrahlungsmessungen durch [Ångström, 1905] interessierte nur dieses »mehr«:

Die Aufgabe, die ich mir gestellt, war die zu versuchen, die totale nächtliche Ausstrahlung ohne *direkte* Anwendung eines Schirmes beim Anstellen der Observationen zu messen. Es scheint mir, dass

Diagr. 6: Auszug aus dem Paper [Ångström, 1905, S. 2]

Die Größe dieses »mehr« bestimmte [Ångström, 1905] durch eine elektrische Heizung. Damit ist nach den Worten von [Stefan, 1879] »*Hat man jedoch eine Formel für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrahlung aufgestellt, so lässt sich mit Hilfe derselben auch ein Wert für die absolute Größe der ausgestrahlten Wärme ableiten*« auch der Wert der Gegenstrahlung bestimmt, denn die notwendige Formel existiert als Stefan-Boltzmann-Gesetz.

Auch [Clausius, 1864] schreibt analog (siehe Diagramm 7):

Diagr. 7:

Bei der Behandlung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bin ich davon ausgegangen, dafs zwischen dem Wärmeübergange aus einem wärmeren in einen kälteren Körper und demjenigen aus einem kälteren in einen wärmeren Körper der Unterschied stattfindet, dafs

Auszug aus dem Paper [Clausius, 1864, S. 1]

Für [Stefan, 1879] ist die Aufteilung in zwei Wärmeströme nur eine nützliche Aufteilung für die mathematische Behandlung der Probleme bei der Wärmeübertragung. An irgendwelche Realitäten scheint er dabei noch nicht gedacht zu haben.

Wichtig für die weitere Behandlung der Probleme ist auch die Tatsache, daß bei den verwendeten Beobachtungszeiten die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit keine Rolle spielt.

Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit spielt eine wichtige Rolle für den Nachweis, daß die Aufteilung in zwei Wärmeströme physikalische Realität ist. Sowohl aus der Arbeit von [Stefan, 1879] (siehe Faksimile Diagramm 8 von Seite 411) als auch aus der Arbeit von [Clausius, 1864] geht klar hervor, daß weder [Stefan, 1879] noch [Clausius, 1864] irgendwelche Zweifel daran hatten, daß ein Wärmestrom von der kühleren Umgebung zur wärmeren Kugel physikalische Realität ist und von der wärmeren Kugel absorbiert wird[1)] - allerdings hielt es [Stefan, 1879] damals für unmöglich, die beiden Wärmeströme getrennt zu messen, weshalb er die absoluten Größen der beiden Wärmeströme als »hypothetisch« bezeichnet.

> **Anmerkung 3:** Heute kann man sich mit dem Photonenbild eine gewisse Vorstellung von der realen Existenz der beiden Wärmeströme machen, wenngleich mit Messungen als Temperaturänderungen immer nur die Differenz beider Wärmeströme gemessen werden kann. Wenn allerdings einer der beiden Wärmeströme als bekannt vorausgesetzt werden darf, folgt aus der Differenz automatisch die gesuchte Größe. Dieses Meßprinzip ist in der Meßtechnik weit verbreitet und in der Regel in der Datenverarbeitungseinheit der Meßgeräte integriert. Den Nutzer eines Meßgeräts interessiert es in der Regel nicht, was genau im Meßgerät passiert.

Die absolute Grösse der von einem Körper ausgestrahlten Wärmemenge kann durch Versuche nicht bestimmt werden. Versuche können nur den Überschuss der von dem Körper ausgestrahlten über die von ihm gleichzeitig absorbirte Wärmemenge geben, welch' letztere von der ihm aus der Umgebung zugestrahlten Wärme abhängig ist. Hat man jedoch eine Formel für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrahlung aufgestellt, so lässt sich mit Hilfe derselben auch ein Werth für die absolute Grösse der ausgestrahlten Wärme ableiten, doch hat ein solcher nur eine hypothetische Bedeutung.

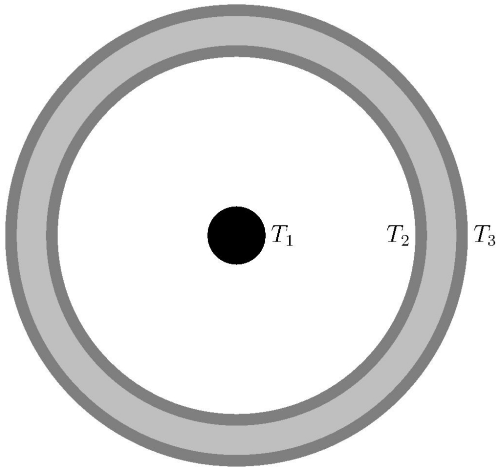
Diagr. 8: Auszug aus dem Paper [Stefan, 1879, S. 411]

3 Die Endlichkeit der Signalausbreitung

Wir betrachten eine Versuchsanordnung ähnlich der von [Dulong und Petit, 1817a] verwendeten (Bild 1 auf Seite 28) mit einer warmen Kugel im Zentrum einer sehr großen äußeren

1) Wir betrachten heute z.B. schwarze Löcher als physikalische Realität - und können diese prinzipiell nicht sehen.

Hülle. Die äußere Hülle soll nicht auf einer konstanten Temperatur gehalten werden, sondern von einem Wärmedämmmaterial umgeben sein, dessen andere Seite auf einer konstanten Temperatur T_3 gehalten wird - also schematisch die Anordnung nach Bild 9.



Diagr. 9: [Dulong und Petit, 1817a] Versuchsaufbau - schematisch und modifiziert

Im stationären Zustand sind die Zusammenhänge einfach (die Wirkung der Wärmedämmung wird mit einer Konstante k beschrieben, alle Oberflächen sollen ideal schwarz sein ($\varepsilon = 1$) und das Vakuum so gut, das Wärmeleitung zwischen T_1 und T_2 keine Rolle spielt. Damit muß durch alle Schichten der gleiche Wärmestrom fließen[2)]:

$$N = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = k(T_2 - T_3) \tag{11}$$

Da die Leistung vorgegeben werden soll, ist Gleichung (11) ausgehend von dem gegebenen T_3 auflösbar nach T_1:

$$T_2 = T_3 + \frac{N}{k} \qquad \text{und} \qquad T_1^4 = T_2^4 + \frac{N}{\sigma}$$
$$\text{oder} \tag{12}$$
$$T_1 = \sqrt[4]{T_2^4 + \frac{N}{\sigma}}$$

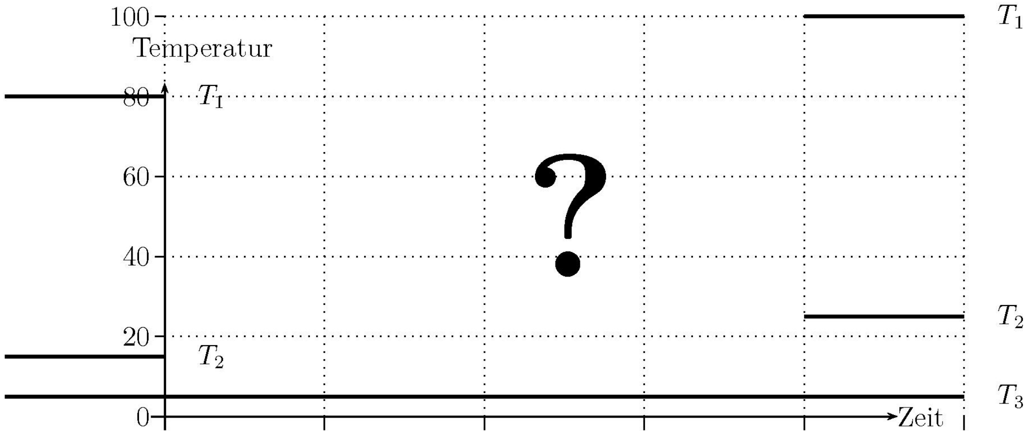
Wenn die Heizleistung N geändert wird, ändern sich T_1 und T_2. Im stationären Zustand sind T_1 und T_2 wieder mit Gleichung (12) zu bestimmen.

Aber wie ist der Zeitverlauf der Temperaturen zwischen den stationären Werten? - siehe Bild 10 auf der nächsten Seite.

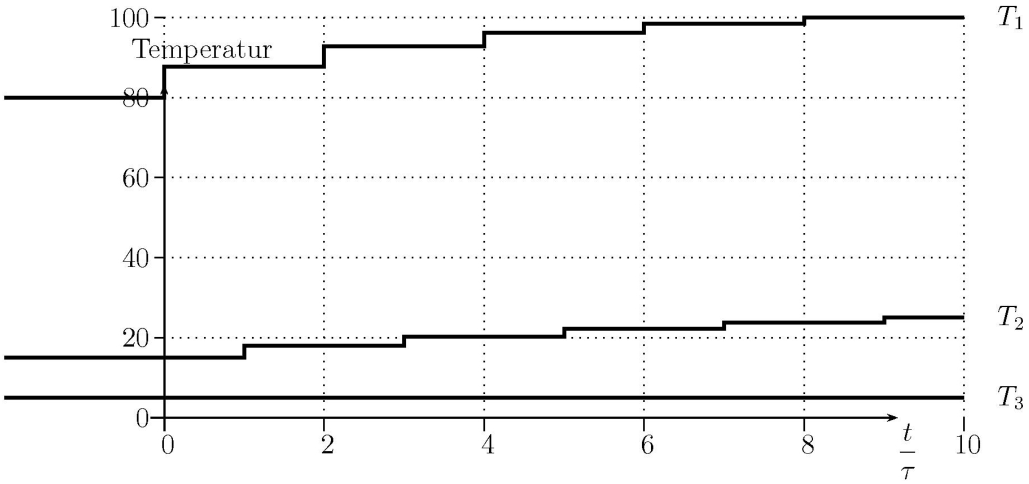
Wie der genaue Zeitverlauf ist hängt natürlich vom Versuchsaufbau ab, seinen Massen usw. Idealisiert nehmen wir an, daß der Abstand zwischen der Kugel in der Mitte und der Hülle sehr groß ist, so daß die Strahlung von der Mittenkugel bis zur Umhüllung eine Laufzeit τ braucht und die Auswirkung einer Leistungsänderung kurz gegenüber der Laufzeit ist (idealisiert also eine Sprungfunktion).

2) Würde nicht durch alle Schichten der gleiche Wärmestrom fließen, müßte die Differenz der Wärmeströme als Energie gespeichert werden, was zu einer laufenden Temperaturänderung führt - das aber widerspricht der vorausgesetzten Stationarität.

Das Ergebnis ist der Temperaturverlauf nach Diagramm 11. Warum ist das so? Nach der Relativitätstheorie kann ein Signal – gleich welcher Art – sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Zum Zeitpunkt der erhöhten Leistungsabgabe der Kugel kann also die Umhüllung noch gar nichts von der Erhöhung der Ausstrahlungsleistung »wissen« (unabhängig von der Art der Strahlungsausbreitung) und behält ihre ursprüngliche Temperatur und die Kugel im Zentrum kann noch gar nicht »wissen«, daß sich die Temperatur der Umhüllung ändern wird und strahlt die erhöhte Leistung so lange entsprechend der alten Temperatur der Umhüllung ab, bis die Information von der Umhüllung eintrifft, daß die Temperatur gestiegen ist. Um die erhöhte Leistung aber bei einer wärmeren Umhüllung abzustrahlen, ist eine Temperaturerhöhung notwendig. Das geht immer hin und her, bis sich endlich der neue stationäre Wert eingestellt hat (dargestellt ist das »Ping-Pong« nur viermal).



Diagr. 10: Wie ist der Temperaturverlauf, wenn zum Zeitnullpunkt die Heizleistung plötzlich erhöht wird?

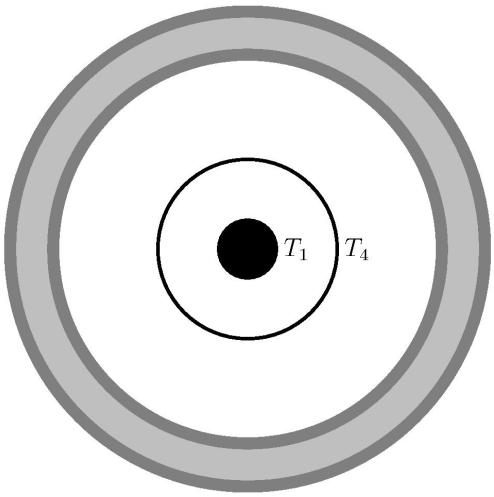


Diagr. 11: Temperaturverlauf, wenn zum Zeitnullpunkt die Heizleistung plötzlich erhöht wird und die Wärmeausbreitung eine Laufzeit τ hat.

Mit dem Konzept der Gegenstrahlung ist die Erklärung auch ohne Relativitätstheorie ganz einfach: Entsprechend der höheren Heizleistung erhöht sich die Temperatur der Kugel in der Mitte bei konstanter Gegenstrahlung. Wenn die erhöhte Heizleistung auf der Umhüllung eintrifft (nach der Laufzeit τ), erhöht sich die Temperatur der Umhüllung und dementsprechend wird mehr Gegenstrahlung emittiert. Nach einer weiteren Laufzeit τ trifft die Gegenstrahlung auf der Zentrumskugel ein und wird absorbiert. Die absorbierte Leistung muß auch wieder emittiert werden und dadurch erhöht sich die Temperatur der Zentrumskugel – usw. die Temperaturen schaukeln sich gegenseitig hoch bzw. die steigende Gegenstrahlung (infolge der höheren Temperatur) der kühleren Umhüllung erhöht die Temperatur der warmen Zentrumskugel.

4 Das Pyrgeometer

Das Pyrgeometer dient dazu, die Gegenstrahlung zu messen. Zur Erklärung der Funktionsweise des Pyrgeometers wird die Anordnung nach Bild 9 auf Seite 33 etwas erweitert, indem eine schwarze Folie (Pyrgeometerfolie) um die Zentralkugel angeordnet wird (siehe Diagramm 12).



Diagr. 12: Versuchsaufbau nach Diagramm 9 auf Seite 33 mit Pyrgeometerfolie ergänzt.

Bekannt sind nur die Temperaturen T_1 und T_4. Gesucht ist die Gegenstrahlung N_G, die von der Umhüllung ausgeht. Entsprechend Gleichung (11 auf Seite 33) ist der Nettowärmestrom zwischen der Zentralkugel und der Pyrgeometerfolie:

$$N = \sigma(T_1^4 - T_4^4) = \sigma T_1^4 - \sigma T_4^4 \tag{13}$$

Im stationären Zustand muß dieser Nettowärmestrom an die Umhüllung weitergegeben werden:

$$N = \sigma T_4^4 - N_G \tag{14}$$

Aus den beiden Gleichungen (13) und (14) folgt eindeutig der Wert der Gegenstrahlung:

$$\begin{aligned} \sigma T_1^4 - \sigma T_4^4 &= \sigma T_4^4 - N_G \\ N_G &= \sigma(2T_4^4 - T_1^4) \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichung ist die grundlegende Pyrgeometergleichung. In einem technischen Meßgerät sind wie bei jedem technischen Gerät die idealen Bedingungen immer mehr oder weniger gut erfüllt (z. B. kein idealer Absorptionsfaktor) - die Abweichungen werden durch Kalibrierung minimiert. Dabei ist real immer die Nettostrahlung gemessen, derangezeigte Wert der Gegenstrahlung ergibt sich aus der Rechnung, da die [Stefan, 1879]-Gleichung als gültig vorausgesetzt wird. An der Gültigkeit der Stefan-Gleichung (9 auf Seite 29) zweifelt aber heute keiner mehr.

Ein etwas anderes Meßprinzip verwendet das Pyrgeometer nach [Ångström, 1905]. Da bildet eine geheizte Folie (Meßfolie) den oberen Abschluß einer Meßkammer mit ansonsten isothermen Wänden. Die Meßfolie wird so geheizt, daß die Meßfolie die Temperatur T_M der Meßkammer annimmt. Damit hat die Folienseite zur Meßkammer keinen Wärmeaustausch wegen Isothermie. Die Oberseite der Meßfolie strahlt nach Stefan-Boltzmann, kann aber nur die Gegenstrahlung absorbieren. Die Wärmestromdifferenz zwischen der großen Abstrahlung und und der kleineren absorbierten Gegenstrahlung wird durch die Heizung gedeckt. Die elektrische Heizleistung (z. B. in W) ist sehr genau zu messen, wie auch die Größe der Fläche. Damit ergibt sich Größe der Heizleistung in W/m^2. Mit der Meßkammertemperatur ist die Abstrahlung an der Oberseite der Meßfolie bekannt (Stefan-Boltzmann-Gesetz) und mit der Heizleistung ist damit die Größe der Gegenstrahlung bekannt - diesen Sachverhalt beschreibt [Stefan, 1879, S. 411]:

> Die absolute Größe der von einem Körper ausgestrahlten Wärmemenge kann durch Versuche nicht bestimmt werden. Versuche können nur den Überschuss (Heizleistung H) der von dem Körper ausgestrahlten (Stefan-Boltzmann-Gesetz - σT_M^4) über die von ihm gleichzeitig absorbierte Wärmemenge (Gegenstrahlung - N_G) geben, welch' letztere von der ihm aus der Umgebung zugestrahlten Wärme abhängig ist.

Damit folgt aus Stefan-Boltzmann:

$$\sigma T_M^4 = N_G + H \qquad \Rightarrow \qquad N_G = \sigma T_M^4 - H \tag{16}$$

5 Die Entropie

Einige behaupten, die Gegenstrahlung würde gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verstoßen - vernachlässigen dabei aber unzulässigerweise, daß es keine Gegenstrahlung gibt ohne die stärkere Strahlung zu dem Körper, der die Gegenstrahlung emittiert. Die Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen, die die Ausbreitung beschreiben, sind richtungsumkehrbar, d.h. ein Körper der Gegenstrahlung aussendet, die irgendwo absorbiert wird, erhält von dem Absorber unvermeidbar auf dem gleichen Wege in umgekehrter Richtung ebenfalls Strahlung. Da die Temperatur des Absorbers der Gegenstrahlung definitionsgemäß höher ist als die Temperatur des Emitters der Gegenstrahlung ist auch die Strahlungsintensität höher. Damit ist bei jedem beliebigen Subsystem <u>immer</u> erfüllt, daß der Gesamt-Wärmestrom (Netto-Wärmestrom) vom wärmeren zum kälteren Körper geht - und nur den betrifft der der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - und erfüllt damit immer den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Besonders amüsant ist, daß [Boltzmann, 1884] feststellt, daß sich das Gesetz von [Stefan, 1879] erst aus der Erfüllung des zweiten Hauptsatzes ergibt – Faksimile Diagramm 13 auf der nächsten Seite.

funden wurde. Es folgt also aus der electromagnetischen Lichttheorie und dem zweiten Hauptsatze unmittelbar das Stefan'sche Gesetz der Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, ein gewiss bemerkenswerthes Resultat,

Diagr. 13: Auszug aus dem Paper [Boltzmann, 1884, S. 293]

6 Absorptionslänge

Aus der Umkehrbarkeit der Strahlungsausbreitung folgt auch noch etwas bei der Absorption in einem teiltransparenten Medium (z. B. einer Atmosphäre mit Treibhausgasen), daß aus dem gleichen Bereich in dem die Originalstrahlung absorbiert wird, auch die Gegenstrahlung kommt. Aus einem Bereich des teiltransparenten Medium, der praktisch nicht von der Originalstrahlung erreicht wird, kommt auch keine Gegenstrahlung zum Emitter der Originalstrahlung.

Für die die Intensität des Restes I_R der Originalintensität I_0 nach Absorption in einem teiltransparenten Medium gilt in der Regel ein exponentieller Abfall:

$$I_R = I_0 \exp\left(-\frac{x}{L_A}\right) \tag{17}$$

Wie schnell die Intensität sinkt, wird durch die Größe L_A bestimmt, die als Absorptionslänge bezeichnet wird. Nach der Absorptionslänge ist die Anfangsintensität auf einen Bruchteil $^1/_e$ (≈ 0.37) abgefallen. Ist die durchlaufene optische Länge ein Mehrfaches der Absorptionslänge, ist die Originalstrahlung praktisch vollständig absorbiert - oft als Sättigung bezeichnet.

Wenn das absorbierende Medium einen Temperaturgradienten hat, wird die Tatsache bedeutungsvoll, daß die anteilige Verteilung der Herkunft der Gegenstrahlung aus verschiedenen Bereichen so ist, wie der Restwert der Originalstrahlung – oder mit anderen Worten die Stärke der Gegenstrahlung bestimmt sich aus einer mittleren Temperatur über der Absorptionslänge.

Wenn die Absorptionslänge so gering ist, daß der Temperaturabfall über der Absorptionslänge fast Null ist, dann hat eine Verkürzung der Absorptionslänge praktisch keinen Einfluß auf die Stärke der Gegenstrahlung. Wenn aber über der Absorptionslänge die Temperatur merklich abnimmt, dann bedeutet eine Verkürzung der Absorptionslänge daß kaum noch Strahlungsanteile aus Bereichen kommen, wo die Anfangstemperatur sehr deutlich abgenommen hat, d.h. die mittlere Temperatur der Bereiche, deren Emission den Absorber der Gegenstrahlung erreicht, ist gestiegen.

Mit anderen Worten: Die Intensität der Gegenstrahlung steigt, wenn die Absorptionslänge kürzer wird – sofern die Absorptionslänge nicht schon so kurz ist, daß über der Absorptionslänge der Temperaturabfall vernachlässigbar ist. Oder wenn die Absorptionslänge ein Vielfaches der optischen Weglänge ist, dann wird kaum absorbiert und kaum emittiert und die Stärke der Gegenstrahlung nimmt zwar relativ zu - bleibt aber vernachlässigbar.

7 Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Boltzmann 1884] Boltzmann, L.: Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie. In: *Annalen der Physik und Chemie* 22 (1884), S. 291 – 294. – Faksimile auf `http://www.ing-buero-ebel.de/strahlung/Original/Boltzmann1884.pdf` 2, 36, 37, 38

[Clausius 1864] Clausius, Rudolf: Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Gränzen ihrer Wirkung. In: *Annalen der Physik* 197 (1864), Nr. 1, S. 1 – 44. – URL `http://zfbb.thulb.uni-jena.de/servlets/MCRFileNodeServlet/jportal_derivate_00142632/18641970102_ftp.pdf` 2, 31, 32

[de La Provostaye und Desains 1846] de La Provostaye, F.H. ; Desains, P.: *Mémoire sur le rayonnement de la chaleur [Abhandlung zur Wärmestrahlung]*. impr. Bachelier, 1846. – URL `http://books.google.de/books?id=Dd-DngEACAAJ` 6, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 23

[Despretz 1817] Despretz, César-Mansuéte: Mmoire sur le Refroidissement de Quelques Mtaux, pour Dterminer leur Chaleur Spcifique et leur Conductibilit Extrieure [Abhandlung für die Kühlung einiger Metalle Und Bestimmung deren spezifischer Wärmeleitfähigkeit und Wärmeabgabe nach auen]. In: *Annales de chimie et de physique* 16 (1817), Nr. VI, S. 184–201. – URL `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6570840m.image.langEN` 21, 22

[Draper 1847] Draper, J.W.: *Scientific Memoirs, Being Experimental Contributions to a Knowledge of Radiant Energy*. Harper, 1847. – URL `http://books.google.de/books?id=DjUIAAAAIAAJ` 1, 23, 24

[Draper 1878] Draper, J.W.: *Scientific Memoirs: Being Experimental Contributions to a Knowledge of Radiant Energy [Wissenschaftliche Abhandlungen: Experimentelle Beiträge zur Erkenntnis der strahlenden Energy]*. Harper & brothers, 1878. – URL `http://www.archive.org/details/scientificmemoir00drapuoft` 24

[Dulong und Petit 1817a] Dulong, MM. ; Petit: Des Recherches sur la Mesure des Temperatures et sur les Lois de la communication de la chaleur [Untersuchungen über die Temperaturmessung und die Gesetze der Wärmeübertragung]. In: *Annales de Chimie et de Physique* VII. (1817), S. 225 – 265, 337 – 368 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 32, 33, 37, 38

[Dulong und Petit 1817b] Dulong, MM. ; Petit: Des Recherches sur la Mesure des Temperatures et sur les Lois de la communication de la chaleur [Untersuchungen über die Temperaturmessung und die Gesetze der Wärmeübertragung]. In: *Journal de l'ecole polytechnique* Tome XI (1817), S. 234–294 5

[Ericsson 1875] Ericsson, J.: The Difference of Thermal Energy Transmitted to the Earth by Radiation from Different Parts of the Solar Surface [Die Unterschiede der thermischen Energie der Strahlung auf die Erde von verschiedenen Teilen der Sonnenoberfläche]. In: *Nature* 12 (1875), Nr. 311, S. 517 – 520. – URL `http://www.nature.com/nature/journal/v12/n311/pdf/012517b0.pdf` 1, 3, 23, 24, 25, 26

[Kundt und Warburg 1875] Kundt, A. ; Warburg, E.: Ueber Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase. In: *Annalen der Physik* 231 (1875), Nr. 7, S. 337 – 365, 525 – 550. – URL `http://dx.doi.org/10.1002/andp.18752310702`. – ISSN 1521-3889 5

[Lehnebach 1874] Lehnebach, Stud. A.: Bestimmung des Emissionsvermögens schwarzer Körper mittelst der Eiscalorimetrischen Methode. In: *Poggendorfs Annalen der Physik* 227 (1874), Nr. 1, S. 96 – 108. – URL `http://zfbb.thulb.uni-jena.de/servlets/MCRFileNodeServlet/jportal_derivate_00144359/18742270105_ftp.pdf` 17, 23

[Pouillet 1838] Pouillet, C. S. M.: Mémoire sur la chaleur solaire, sur les pouvoirs rayonnants et absorbants de l'air atmosphérique, et sur la témperature de l'espace [Abhandlung zur Solarwärme, Absorptions und Emission der Atmosphärenluf und die Temperatur des Alls]. In: *Compt. rend.* 7 (1838), S. 24 – 28 3, 17, 23, 26, 27

[Ångström 1905] Ångström, Knut: *Über die Anwendung der elektrischen Kompensationsmethode zur Bestimmung der nächtlichen Ausstrahlung*. Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala : Druck von E. Berling, 1905. – 10 S. – `http://worldcat.org` ID - 458483281 31, 36, 38

[Rossetti 1878] Rossetti, Francesco: Indagini sperimentali sullatemperature del sole [Experimentelle Untersuchungen an der Temperatur der Sonne]. In: *Reale Acc. dei Lincei* 2 (1878), S. 64 27, 28

[Soret 1872] Soret, Jaques L.: *Recherches sur l'intensité de la radiation solaire [Forschung zur Intensität der Sonnenstrahlung]*. Gounouilhou, 1872. – URL `http://books.google.de/books?id=OCgLmwEACAAJ` 3, 27

[Stefan 1879] Stefan, J.: ber die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften* 79 (1879), S. 391 – 428. – Faksimile auf http://www.ing-buero-ebel.de/strahlung/Original/Stefan1879.pdf 2, 3, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 36, 37, 38

[Violle 1875] Violle, J.: Sur la température du Soleil (réponse á M. Soret) [Die Temperatur der Sonne (Antwort an Herrn Soret)]. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 4 (1875), S. 363–370 27

[Winkelmann 1876] Winkelmann, A.: Ueber die Wärmeleitung der Gase. In: *Annalen der Physik* 233 (1876), Nr. 4, S. 497–555. – URL http://dx.doi.org/10.1002/andp.18762330402. – ISSN 1521-3889 5

[Wüllner 1872] Wüllner, A.: *Lehrbuch der Experimentalphysik*. B. G. Teubner, 1872 (Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. 4). – URL http://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb11018337_00005.html 23